



Escola de Camins
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

Evaluación de una herramienta para el estudio de problemas de interacción fluido – estructura

Treball realitzat per:

Laura Beltran i Coloma

Dirigit per:

Dr. Riccardo Rossi

Rubén Zorrilla

Grau en:

Enginyeria Civil

Barcelona, **Juny de 2017**

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE GRAU

Resumen

A lo largo de los últimos años ha existido un gran desarrollo de distintas técnicas computacionales con el propósito de resolver, de una forma rápida y eficaz, problemas reales de interacción entre distintos materiales. A este fin el equipo CIMNE ha desarrollado diversos *softwares* entre los que cabe destacar Kratos Multiphysics. Esta herramienta de cálculo presenta una interfaz amigable con el usuario que permite una parametrización sencilla y con la que se puede simular el comportamiento de distintos modelos mecánicos y de fluidos. Este equipo está continuamente introduciendo modificaciones tanto de programación como del interfaz para mejorar la experiencia en el uso de esta herramienta.

En este trabajo se han realizado distintos experimentos en base a los modelos de Mok y Turek-Hron a fin de verificar el buen funcionamiento del programa. Los ejemplos resueltos son, en todos los casos, no lineales y fuertemente acoplados, por lo que brindan una notable dificultad de resolución y, por lo tanto, ofrecen una buena plataforma de pruebas. Se han abordado problemas de interacción fluido – estructura (FSI), estructurales (CSM) y de fluidos (CFD), introduciendo variaciones en los materiales y las condiciones de contorno. Los modelos utilizados han sido, mayoritariamente, en 2D, pero también se han realizado ensayos en 3D.

En el trabajo se ha evaluado, tanto la precisión de los resultados obtenidos como la malla necesaria para obtener unos resultados fiables. También se ha tenido en consideración el tiempo necesario para llegar a dichos resultados.

Durante la utilización del *software* se ha evidenciado que resulta muy relevante una correcta elección de la malla y el paso de tiempo. Esta selección condiciona en gran medida la precisión de los resultados. También se ha constatado la gran diferencia de coste computacional y tiempo entre los problemas CSM y CFD respecto a los problemas FSI, donde existe una interacción entre dos materiales. Se puede afirmar que, de forma general, la herramienta tiene un comportamiento excelente.

Abstract

Over the last few years there has been a great development of different computational techniques with the purpose of solving, in a fast and effective way, real interaction problems between different materials. The team CIMNE has developed a great number of softwares as Kratos Multiphysics. This calculation tool presents a user-friendly interface that allows an easy parameterization and simulates the behavior of different mechanical models. This team is continuously introducing changes of both programming and interface to improve the experience in the use of this tool.

In this project, several experiments have been carried out based on the models of Mok and Turek-Hron in order to verify the good operation of the program. The used examples are, in all cases, non-linear and strongly coupled, so they can be considered a challenge and, therefore, offer a good testing platform. Problems of fluid - structural interaction (FSI), structural problems (CSM) and fluid problems (CFD), have been solved, introducing variations in materials and boundary conditions. The used models are mainly in 2D, but also 3D models were tested.

In the project have been evaluated both the accuracy of the results obtained and the mesh required to obtain reliable results. Also, it has been taken into account the necessary time to achieve accurate results.

Using the software Kratos Multiphysics it has become evident that a correct selection of the mesh and the time step is very relevant. This selection greatly determines the accuracy of the results. It has also been observed the great difference in computational cost and time between CSM and CFD problems with respect to FSI problems, where there is an interaction between two materials.

It can be stated that, in general, the software has an excellent behavior.

Contenido

Lista de Figuras	6
Lista de Tablas	7
1 Introducción	8
1.1 Objetivos	9
1.2 El problema FSI.....	9
1.3 Resumen de contenidos.....	10
2 Estado del arte	11
2.1 Mecánica del medio continuo.....	12
2.1.1 Cinemática	12
2.1.2 Deformaciones	13
2.1.3 Tensión.....	14
2.1.4 Ecuaciones de conservación	15
2.1.5 Ecuaciones constitutivas.....	16
2.2 Introducción al FEM.....	18
2.2.1 Discretización del espacio.....	19
2.2.2 Forma débil.....	20
2.2.3 Errores	20
2.2.4 Verificación y validación	20
2.3 Mecánica de Sólidos Computacional	21
2.3.1 Ecuaciones de gobierno	21
2.3.2 Forma débil.....	21
2.3.3 Discretización del tiempo.....	22
2.4 Dinámica de Fluidos Computacional	23
2.4.1 Ecuaciones de gobierno	24
2.4.2 Forma débil.....	25
2.4.3 Discretización del tiempo.....	26
2.5 Interacción Fluido – Estructura	27
2.5.1 Formulación ALE en fluidos.....	27
2.5.2 Condiciones de transmisión	29
2.5.3 Técnicas FSI.....	30
2.5.4 El efecto de masa añadida.....	33
2.5.5 Minimización del residuo FSI.....	33

3	Metodología.....	35
3.1	Kratos Multiphysics	36
3.2	GiD	36
3.3	Equipo de trabajo	37
4	Pruebas y resultados	38
4.1	Canal con un muro flexible en 2D	39
4.1.1	Descripción	39
4.1.2	Resultados	40
4.2	Canal con muro flexible en 3D	47
4.2.1	Descripción	47
4.2.2	Resultados	47
4.3	Problema de Turek – Hron	54
4.3.1	Descripción	54
4.3.2	Calibración	55
4.3.3	Resultados	63
5	Conclusiones y futuras líneas de trabajo	62
5.1	Conclusiones	68
5.2	Futuras líneas de trabajo.....	70
	Referencias bibliográficas	72

Lista de Figuras

Imagen 2.1 Configuración de un cuerpo	13
Imagen 2.2 Discretización del espacio	19
Imagen 2.3 Comparación de las descripciones Lagrangiana, Euleriana y ALE.....	27
Imagen 2.4 Representación de los dominios y fronteras en un problema FSI.....	29
Imagen 2.5 Efecto del efecto de masa añadida a técnicas monolíticas y particionadas	33
Imagen 4.1 Geometría y condiciones de contorno del problema de Mok	39
Imagen 4.2 Evolución de la velocidad en x [m/s] (Mok).....	43
Imagen 4.3 Evolución de la presión [Pa] (Mok)	46
Imagen 4.4 Plano xy de la malla del Mok en 3D	47
Imagen 4.5 Desplazamiento de la malla del fluido del Mok en 3D (segundo 3.8)	47
Imagen 4.6 Evolución de la velocidad en x [m/s] (Mok en 3D)	50
Imagen 4.7 Evolución de la presión [Pa] (Mok en 3D)	52
Imagen 4.8 Distribución de velocidades en el Mok en 3D [m/s]	53
Imagen 4.9 Geometría del problema Turek - Hron	54
Imagen 4.10 Desplazamiento en x CSM 1 [m].....	58
Imagen 4.11 Desplazamiento en y CSM 1 [m].....	58
Imagen 4.12 Desplazamiento en x CSM 2 [m].....	58
Imagen 4.13 Desplazamiento en y CSM 2 [m].....	59
Imagen 4.14 Módulo del desplazamiento en el segundo 4.5 CSM 3 [m]	59
Imagen 4.15 Módulo del desplazamiento en el segundo 4.99 CSM 3 [m]	59
Imagen 4.16 Módulo de la velocidad en CFD 1 [m/s].....	62
Imagen 4.17 Módulo de la velocidad en CFD 2 [m/s].....	62
Imagen 4.18 Módulo de la velocidad en el segundo 42.8 CFD 3 [m/s]	62
Imagen 4.19 Módulo de la velocidad en el segundo 42.93 CFD 3 [m/s].....	63
Imagen 4.20 Desplazamiento de la malla en el eje x del FSI 1 [m]	64
Imagen 4.21 Desplazamiento de la malla en el eje y del FSI 1 [m]	64
Imagen 4.22 Módulo de la velocidad del FSI 1 [m/s]	64

Lista de Tablas

Tabla 4.1 Resultados de la calibración CSM 1	56
Tabla 4.2 Resultados de la calibración CSM 2	57
Tabla 4.3 Resultados de la calibración CSM 3	57
Tabla 4.4 Resultados de la calibración CFD 1	60
Tabla 4.5 Resultados de la calibración CFD 2	61
Tabla 4.6 Resultados de la calibración CFD 3	61
Tabla 4.7 Resultados FSI 1	63
Tabla 4.8 Resultados FSI 3	66

Capítulo 1

Introducción

1.1 Objetivos

Este trabajo tiene dos objetivos principales; por un lado, se desea comprobar el buen funcionamiento de la herramienta de cálculo de problemas de interacción fluido – estructura (*Fluid – Structure Interaction*, FSI) Kratos Multiphysics y; por otro lado, se aspira a aprender a usar técnicas numéricas para la resolución de problemas FSI.

El primer objetivo está enfocado a validar el correcto funcionamiento de la aplicación para calcular problemas de FSI desarrollada por un sector del equipo de investigadores de CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería). Este equipo, entre otras muchas cosas, se dedica a investigar en métodos numéricos, crear y mejorar programas de cálculo como en el que se centrará este trabajo. En los últimos meses se han implementado muchas mejoras en el programa Kratos; por ejemplo, ahora existe la opción de implementar una función en las condiciones de contorno en lugar de sólo valores numéricos, se ha mejorado la interfaz, se ha mejorado el algoritmo FSI y se ha mejorado la paralelización del FSI. Todas estas mejoras deben ser testeadas para comprobar que el programa sigue funcionando correctamente. Para conseguirlo, se resolverán distintos problemas cuya solución es conocida con el programa Kratos Multiphysics, incluyendo problemas de estructuras, de fluidos y de interacción fluido – estructura.

El segundo objetivo tiene un aspecto más académico, ya que se busca obtener nuevos conocimientos en el campo de los métodos numéricos relacionados con el cálculo estructural y de dinámica de fluidos. Para conseguir un mayor entendimiento en esta materia es necesario repasar las bases de la mecánica de medios continuos, la mecánica estructural y de fluidos y; finalmente, relacionarlos entre ellos para poder encajar las soluciones del fluido y la estructura.

1.2 El problema FSI

El problema de interacción fluido – estructura (*Fluid – Structure Interaction problem*, FSI) describe la interacción entre un cuerpo deformable (la estructura) y un fluido en movimiento que lo envuelve. En la naturaleza aparecen muchos problemas de este tipo, como, por ejemplo, la sangre fluyendo por las venas en el cuerpo humano o las alas de un ave al volar. En el campo de la ingeniería existen también muchos ejemplos, como puentes colgantes o coches en movimiento.

Este tipo de problemas pertenecen a la familia de los problemas acoplados. Esto es debido a que, para resolverlos, es necesario resolver el problema mecánico de la estructura y el problema de dinámica del fluido, teniendo en cuenta que sus soluciones son dependientes la una de la otra. [21]

Dado que, en general, son complejos de resolver analíticamente, suelen usarse técnicas experimentales o técnicas numéricas para hallar la solución. La herramienta experimental más usada actualmente son los túneles de viento. Sin embargo, su construcción y uso tienen un coste muy elevado, por lo tanto, no muchas compañías pueden permitirse usarlos. [21] Por este motivo, cada vez se estudian más alternativas con métodos numéricos para resolver problemas FSI. La mayor ventaja de este tipo de aplicaciones es la posibilidad de realizar un gran número de simulaciones de problemas muy diversos a un coste mucho menor. Actualmente, este es un campo en crecimiento, por lo que se espera reducir costes computacionales y temporales en el futuro.

1.3 Resumen de contenidos

A continuación se describen brevemente los contenidos de este trabajo.

En el capítulo 1 se introducen los objetivos del trabajo y el uso de métodos numéricos para la resolución de problemas FSI.

En el capítulo 2 se realiza un resumen de la teoría existente en cuanto a los aspectos básicos y la formulación de la mecánica del medio continuo, la mecánica de sólidos y la de fluidos. Una vez entendido el comportamiento de ambos medios por separado, se explican métodos de cálculo de interacciones.

En el capítulo 3 se describen los programas usados para el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 4 se describen las propiedades y las condiciones utilizadas para cada experimento resuelto mediante Kratos Multiphysics. Se reportan los distintos resultados obtenidos y se comenta la calidad de dichos resultados, así como los problemas encontrados en el desarrollo experimental.

Para terminar, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones alcanzadas y se comentan futuras líneas de trabajo.

Capítulo 2

Estado del arte

En este apartado se realiza un resumen del estado del arte en los problemas de interacción fluido – estructura. Para ello, primero se explican las bases de la mecánica de medios continuos; posteriormente, se revisan los aspectos principales del método de los elementos finitos para problemas estructurales y de fluidos. Para finalizar, se expone el funcionamiento de la interacción fluido – estructura.

2.1 Mecánica del medio continuo

En esta sección se repasan las ecuaciones básicas de la mecánica de medios continuos necesarias para entender el resto del trabajo.

Este capítulo está basado en el documento [21] de la bibliografía; para más información se pueden revisar [4], [15], [20] entre otros.

2.1.1 Cinemática

La cinemática es el estudio del movimiento y de la deformación de un cuerpo sin tener en cuenta las fuerzas responsables. A la posición del cuerpo en el tiempo $t = 0$ se la llama *configuración inicial* y se representa como Ω_0 ; si no se indica lo contrario, es denominada *configuración de referencia*. A la *configuración actual* se la denota como Ω .

Es importante recordar que un cuerpo continuo se considera compuesto de unas partículas conocidas como *puntos materiales*. El vector de posición de cualquier punto material en la configuración de referencia se define como \mathbf{X} y su valor es el siguiente:

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n_{dim}} X_i \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

donde:

- X_i es la posición de cada punto
- \mathbf{e}_i son los vectores base en coordenadas cartesianas
- n_{dim} es el número de dimensiones

Las coordenadas X_i se llaman *coordenadas Lagrangianas* o *materiales*. En la descripción Lagrangiana, la usada normalmente en mecánica de sólidos, las coordenadas materiales (\mathbf{X}) y el tiempo (t) se toman como variables independientes.

Se puede definir el movimiento del cuerpo gracias a la función de deformación Φ . A partir de esta función se puede pasar del sistema de referencia Lagrangiano al *Euleriano* o *espacial*, que emplea como configuración de referencia la configuración actual. En la descripción Euleriana, las coordenadas espaciales (\mathbf{x}) y el tiempo (t) se toman como variables independientes. Normalmente se usa esta descripción para mecánica de fluidos. El valor de las coordenadas Eulerianas es el siguiente:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n_{dim}} x_i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

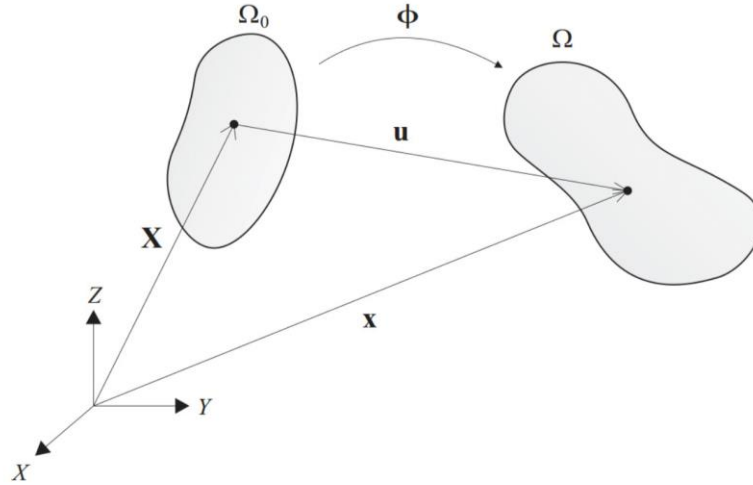


Imagen 2.1 Configuración de un cuerpo. Imagen extraída de [7]

En la Imagen 2.1 se muestra la relación entre los distintos sistemas de referencia.

El desplazamiento (\mathbf{u}) se define como la diferencia entre la configuración actual y la de referencia (Ec. 2.4). Mientras que la velocidad (\mathbf{v}) (Ec. 2.5) y la aceleración (\mathbf{a}) (Ec. 2.6) se definen como la derivada material respecto al tiempo del desplazamiento y la velocidad respectivamente.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \Phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.6)$$

Se debe tener en cuenta que, asociado al desplazamiento desde la configuración de referencia Ω_0 hasta la configuración Ω existe un cambio en el tamaño y/o la forma del cuerpo. A este cambio se le llama *deformación* y se mide con el *tensor de gradiente de deformaciones* (\mathbf{F}), que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Se define el *determinante Jacobiano* como:

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.8)$$

2.1.2 Deformaciones

Las fuerzas aplicadas en un cuerpo continuo resultan en deformaciones. La medida de deformación básica, en la descripción Lagrangiana, es el *tensor de deformaciones Green-Lagrange* que tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.9)$$

Se puede escribir en función del desplazamiento como:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.10)$$

Para deformaciones pequeñas, el término no lineal de la ecuación 2.10 se puede despreciar, dando lugar al *tensor de deformaciones infinitesimal*, definido como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.11)$$

2.1.3 Tensión

Se define como la cantidad de fuerza por unidad de área. En medios continuos su valor viene dado por el *vector de tracción superficial* (\mathbf{t}). El teorema de Cauchy afirma que existe un tensor ($\boldsymbol{\sigma}$) conocido como el *tensor de tensiones de Cauchy* tal que por cada vector normal unitario (\mathbf{n}), el vector de tracción superficial se obtiene como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \quad (2.12)$$

Es interesante remarcar que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ gracias a la conservación del momento angular.

El teorema de Cauchy también se puede expresar en la configuración de referencia como:

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} \quad (2.13)$$

donde:

- \mathbf{P} es el tensor nominal de tensiones.

Es importante remarcar que el tensor transpuesto del \mathbf{P} es conocido como el *primer tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff*, que se usará a lo largo de este trabajo. El *segundo tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff* (\mathbf{S}) es simétrico y se define como:

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S} \quad (2.14)$$

Finalmente, es interesante detallar algunas transformaciones útiles entre los tensores de tensiones presentados.

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.17)$$

2.1.4 Ecuaciones de conservación

Estas ecuaciones postulan que, durante la evolución temporal de un sistema aislado, una magnitud física tiene un valor constante en el total del dominio del problema Ω . Debido a la propiedad de adición de las integrales, las ecuaciones de conservación también deben satisfacerse en cualquier subdominio del total Ω .

En esta sección se expondrán las ecuaciones de conservación de la masa, conservación del momento lineal y conservación del momento angular. En los libros de referencia [8] y [15] se puede encontrar una explicación más detallada.

Conservación de la masa

La *ecuación de la conservación de la masa* postula que, si no hay fuentes ni sumideros de masa, ésta se mantiene constante en el dominio. La masa se puede expresar en distintas configuraciones como:

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}, t) d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{X}, t) J d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) d\Omega_0 \quad (2.18)$$

Como se puede ver, la dependencia temporal reside en la densidad (ρ), por lo que la ecuación de conservación de la masa se puede expresar en términos de la densidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 también se conoce como *ecuación de continuidad* y se puede hallar aplicando el *teorema de transporte de Reynolds* a la definición de la masa anterior.

En caso de que el material sea incompresible, la densidad se mantiene constante durante el tiempo, por lo que la ecuación de continuidad se simplifica como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.20)$$

Conservación del momento lineal

También es conocida como *balance del momento lineal*. Postula que la variación de momento lineal es igual al total de fuerzas aplicadas. Se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.21)$$

Aplicando el teorema de Reynolds, la ecuación de conservación de la masa y el Teorema de la divergencia de Gauss a la ecuación 2.21, se halla la *ecuación del momento lineal*:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.22)$$

En problemas estáticos, el término de la aceleración de la ecuación 2.22 es nulo. En este caso se le suele denominar a la ecuación de momento lineal como *ecuación de equilibrio*.

En descripción Euleriana, la ecuación 2.22 se escribe de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.23)$$

En mecánica de fluidos, típicamente se usa la ecuación de momento lineal en configuración Euleriana. Es importante remarcar que en esta descripción aparece el término convectivo, fruto de la definición de derivada total:

$$\frac{D(\phi)}{Dt} = \frac{\partial(\phi)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\phi) \quad (2.24)$$

Conservación del momento angular

Su ecuación es la siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.25)$$

Como se ha comentado en el apartado 2.1.3 Tensión, a partir de esta ecuación se puede demostrar que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.26)$$

Esta igualdad implica:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P}^T \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.27)$$

2.1.5 Ecuaciones constitutivas

Estas ecuaciones relacionan las propiedades mecánicas de cualquier material y su relación tensión – deformación. Existen múltiples ecuaciones constitutivas, pero en este apartado sólo se explicarán las empleadas en el trabajo.

Elasticidad lineal

La teoría de la elasticidad lineal es adecuada para problemas donde los cambios de forma del cuerpo a analizar son pequeños, por lo que casi no existe diferencia entre la configuración de referencia y la configuración actual. En este caso, se puede usar el tensor de deformaciones infinitesimales (Ec. 2.11) y la ecuación de la conservación de la energía queda de la forma:

$$\rho_0 \dot{W}^{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.28)$$

La ley de la conservación de la energía afirma que la cantidad de energía total en cualquier sistema físico aislado permanece invariable con el tiempo. Esto es debido a que la energía puede transformarse en otra energía, pero no desaparecer. Para el caso de elasticidad lineal, la función de energía de deformación sólo depende del tensor de deformaciones infinitesimales y se define como:

$$W^{int} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.29)$$

donde:

- \mathbb{C} es un tensor de cuarto orden que contiene las constantes elásticas.

Para un material isotrópico, como los que se considerarán en este trabajo, los componentes de este tensor se reducen a dos constantes. Éstas son los *parámetros de Lamé*, λ y μ . Para un material isotrópico, \mathbb{C} se define como:

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} \quad (2.30)$$

donde:

- \mathbf{I} es el tensor identidad de segundo orden
- \mathbb{I} es el tensor identidad simétrico de cuatro orden

Aplicando la ecuación de energía de deformación (Ec. 2.29) a la ecuación 2.28, se obtiene la ecuación constitutiva que relaciona tensión y deformación para casos elásticos lineales:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Si se substituye la ecuación 2.30 en la ecuación 2.31, se obtiene la siguiente ecuación para calcular la tensión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.32)$$

Elasticidad no lineal

Debe ser empleada en problemas donde el cuerpo sufre grandes deformaciones, ya sea por grandes desplazamientos o rotaciones. La respuesta mecánica se puede modelar usando el *modelo de Kirchhoff – Saint Venant*, que es una generalización de la teoría lineal elástica.

En este caso, la función de la energía de deformación es análoga a la del caso de elasticidad lineal, pero considerando el tensor de deformación y no el tensor de deformación infinitesimal:

$$W^{int} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.33)$$

La ecuación constitutiva que relaciona tensión – deformación es:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.34)$$

De igual modo que en la elasticidad lineal se obtiene la ecuación:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.35)$$

Es interesante recordar las expresiones de los parámetros de Lamé λ y μ en función de otras variables elásticas.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.36)$$

donde:

- E es el módulo de Young
- ν es el número de Poisson
- K es el módulo de compresibilidad

Fluidos Newtonianos

Un fluido es considerado Newtoniano si su viscosidad se mantiene constante en el tiempo.

La tensión (σ) proviene de dos fuentes tal y como se puede ver en la Ec. 2.37, la presión y la viscosidad. La primera viene de la presión termodinámica (p) y aparece en todo momento, incluso cuando el fluido no se mueve. La segunda está relacionada con el movimiento del fluido, por lo tanto, no aparece si el fluido está en estado estacionario. La tensión en un fluido Newtoniano tiene la forma:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbb{C}\mathbf{d} \quad (2.37)$$

Donde \mathbf{d} es el gradiente simétrico de la velocidad definido como:

$$\mathbf{d} = \nabla^s \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t) \quad (2.38)$$

Para fluidos incompresibles, la tensión queda de la forma:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \quad (2.39)$$

2.2 Introducción al FEM

El Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM) se usa para solucionar ecuaciones que gobiernan fenómenos que aparecen en la naturaleza. Éstos, generalmente, no tienen una solución analítica ya que sus ecuaciones de gobierno son muy complejas, por lo que se necesitan métodos de resolución numérica. Gracias a estas técnicas, se transforman las ecuaciones matemáticas complejas en ecuaciones algebraicas que dependen de un número fijo de parámetros, "fácilmente" solucionables. Actualmente, se solucionan gran parte de los problemas de ingeniería estructural gracias a métodos numéricos, que están íntimamente relacionados con las matemáticas, el dibujo y la informática.

Habitualmente, con el FEM se puede conocer la evolución en el espacio y/o el tiempo de una o más variables que representan el comportamiento físico de un sistema. Un ejemplo sería hallar los desplazamientos, tensiones y deformaciones que sufre una estructura al someterla a un conjunto de cargas.

Este método, al ser numérico, no da la solución exacta del problema, sino una aproximación. Esta idea se desarrolla más detalladamente en el apartado 2.2.1. En el apartado 2.2.3 se explican los distintos tipos de error y a que están asociados.

La referencia básica para todo este apartado es [16] de la bibliografía.

2.2.1 Discretización del espacio

Cuando se usa el FEM para solucionar un problema físico, lo que se resuelve no es el problema en sí mismo, sino un modelo de éste. Una vez se tiene el modelo, se pasa a discretizar el espacio. Para realizarlo se usan elementos finitos, que pueden ser visualizados como una pequeña porción del continuo. Se usa la palabra "finito" para distinguirlo de los elementos "infinitesimales" del cálculo diferencial. Se considera que el continuo está formado por un conjunto de elementos de geometría simple no solapados unidos con nodos (tanto en 3D como en 2D). Se suele decir que una *mall*a de elementos finitos *discretiza* el continuo.

Al resolver el problema mediante discretización, lo que se asegura es el cumplimiento de las ecuaciones de gobierno en los nodos, pero no en todo el continuo, puesto que éste ha sido simplificado en una mall

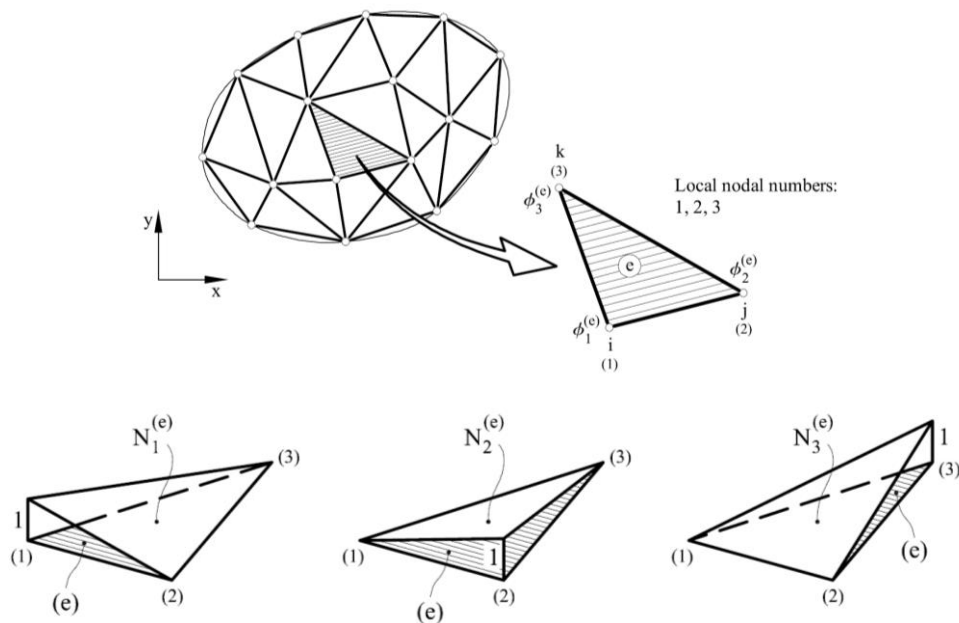
a. Por lo tanto, en función del tamaño de la malla, el resultado será más o menos exacto para el conjunto.


Imagen 2.2 Discretización del espacio. Imagen extraída de [16]

La solución en el continuo se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i \cdot U_i \quad (2.40)$$

donde:

- u es la incógnita
- N_i es la función de forma de cada nodo
- U_i es el valor nodal de la solución

En la Imagen 2.2 se puede ver un ejemplo de discretización del espacio con elementos triangulares y las funciones de forma para cada uno de los elementos. Tal como se ha comentado anteriormente, la solución será exacta en los nodos, pero no en el resto del espacio.

Se puede usar este método para hallar distintas magnitudes físicas como el desplazamiento, la velocidad o la presión.

2.2.2 Forma débil

Una vez se ha discretizado el espacio, el objetivo es asegurar el cumplimiento de las ecuaciones de gobierno en los nodos, tal y como se ha comentado anteriormente. Para conseguirlo, se necesita derivar la matriz de ecuaciones a resolver para cada elemento. Estas ecuaciones expresan el equilibrio entre las fuerzas y los desplazamientos que éstas generan.

Sea L un operador que depende de uno o más incógnitas (u) y que define el problema a resolver del cual no se puede obtener la solución analítica. Con el fin de obtener un sistema de ecuaciones algebraicas, se formula la forma débil de Galerkin. Para ello se requiere que el producto de la función residuo (R) que define el problema por una función test integrada en todo el dominio sea nulo.

$$L(u) = b \quad (2.41)$$

$$R(u) = b - L(u) \quad (2.42)$$

$$\int_{\Omega} (w, R(u)) = 0 \quad (2.43)$$

2.2.3 Errores

Después de discretizar el espacio se cuenta con dos fuentes de error, el error por la modelización del espacio y el error por la discretización. El primero puede ser reducido mejorando el modelo y el segundo realizando una malla más fina, pues se dispone de un número mayor de nodos. Por otro lado, se debe tener en cuenta que, a mayor precisión, más coste computacional.

Además, al resolver los problemas mediante ordenadores, aparecen errores numéricos asociados a la precisión del ordenador.

La suma del error de discretización y el error numérico se conoce como *error del método computacional*.

2.2.4 Verificación y validación

Consiste en comprobar la precisión de los métodos usados comparando los resultados obtenidos con datos experimentales. La verificación se usa, generalmente en primer lugar, para evaluar y reducir los posibles errores numéricos. La validación indica la capacidad del modelo de reproducir el comportamiento real con suficiente precisión. Se validan tanto la exactitud del modelo como del método computacional.

En resumen, la verificación comprueba que se resuelvan problemas estructurales o de fluidos de forma precisa, mientras que la validación dice si se está resolviendo el problema correcto.

Este proceso es muy importante para asegurarse de la idoneidad del método.

2.3 Mecánica de Sólidos Computacional

En el apartado de Mecánica de Sólidos Computacional (*Computational Solid Mechanics*, CSM) se resume el método de resolución de problemas estructurales usando el Método de Elementos Finitos (FEM). Se considerarán deformaciones finitas por simplicidad.

En primer lugar, se comentarán las ecuaciones de gobierno de problemas de estructuras; posteriormente, la forma débil de estas ecuaciones y la discretización del espacio mediante la aproximación por elementos finitos y finalmente, el método de discretización temporal usado.

La referencia básica para este apartado es [21] de la bibliografía.

2.3.1 Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno (forma fuerte del problema) en estructuras se pueden derivar a partir de la ecuación del momento lineal (Ec. 2.23). A esta, se le deben añadir las condiciones de contorno e iniciales necesarias. En notación de índices o de Einstein, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u}_i &= \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i & \text{en } \Omega_0 \\ u_i &= \bar{u}_i^0 & \text{en } t = 0 \\ u_i &= \bar{u}_i & \text{en } \Gamma^D \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{en } \Gamma^D \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde:

- ρ_0 es la densidad en configuración de referencia
- $\ddot{\mathbf{u}}$ es la aceleración
- \mathbf{P} es el tensor de Piola-Kirchhoff
- \mathbf{b} son las fuerzas volumétricas
- Ω_0 es el dominio de referencia de la estructura
- Γ^D es el contorno de Dirichlet
- Γ^N es el contorno de Neumann

Es importante recordar que el contorno del dominio está formado por la unión del contorno de Dirichlet y el contorno de Neumann.

$$\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N \quad (2.45)$$

2.3.2 Forma débil

Tal como se ha explicado en el apartado anterior, se necesita hallar la forma débil de las ecuaciones para resolver el problema. Con este fin, en estructuras se usa el Principio de Trabajos Virtuales (PVW). Este principio afirma: "Una estructura bajo un conjunto de fuerzas externas está en equilibrio si después de imponer a la estructura un conjunto de desplazamientos arbitrarios (virtuales) compatible con las condiciones de contorno, el trabajo realizado por las fuerzas externas en los desplazamientos virtuales es igual al trabajo realizado por los esfuerzos sobre las deformaciones inducidas por los desplazamientos virtuales". El PVW es condición suficiente y necesaria para el equilibrio de toda la estructura o cualquiera de sus partes.

En este trabajo se usará la formulación total Lagrangiana, válida para desplazamientos finitos y deformaciones pequeñas. Sin embargo, ésta también se puede aplicar a grandes deformaciones elásticas si se usa una ley constitutiva hiperelástica adecuada [4].

En estructuras se aplica el PVW al momento lineal, que se integra y multiplica por una función test. A continuación, se presentará la forma débil y la discretización de ésta de una forma general. Aplicando el método detallado en el apartado 2.2.2, puede demostrarse que la forma débil discretizada de la ecuación de gobierno es la siguiente:

$$\int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{S} d\Omega_0 + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_I \rho_0 \mathbf{b} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^N} \mathbf{N}_I \bar{\mathbf{t}}^0 d\Gamma_0 \quad (2.46)$$

donde:

- \mathbf{M} es la matriz de masa, definida:

$$M_{ij} = \int_{\Omega_0} N_I \rho_0 N_J d\Omega_0 \quad (2.47)$$

- \mathbf{B} es la matriz de deformación-desplazamiento no lineal nodal
- \mathbf{S} es el tensor de tensiones
- $\ddot{\mathbf{u}}$ es la aceleración
- \mathbf{N} es la función de forma de cada nodo
- ρ es la densidad del material
- \mathbf{b} son las fuerzas del cuerpo
- t es el tiempo

Se define \mathbf{f}^{int} y \mathbf{f}^{ext} :

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{S} d\Omega_0 \quad \mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_I \rho_0 \mathbf{b} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^N} \mathbf{N}_I \bar{\mathbf{t}}^0 d\Gamma_0 \quad (2.48)$$

Por lo que la ecuación a solucionar finalmente queda de la forma:

$$\mathbf{f}^{int} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext} \quad (2.49)$$

Para ver todo el desarrollo de obtención de la forma débil se recomienda la lectura del capítulo 2.2.2 del documento [21] de la bibliografía.

Estas ecuaciones también pueden usarse en 2D, en función de la geometría del problema, el comportamiento del material o las condiciones de contorno si éstas no varían en la tercera dimensión. Por ejemplo, para problemas planos, el valor de los componentes 33 de las matrices de deformación y tensión sería nulo. La matriz constitutiva se debe modificar para satisfacer estas condiciones.

2.3.3 Discretización del tiempo

Existen distintos métodos para discretizar el tiempo, que se engloban en dos grandes categorías, explícitos e implícitos. En los métodos explícitos, se obtiene la solución para el tiempo t_{n+1} a partir del valor conocido para el tiempo t_n , por lo tanto, no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones. En cambio, en los métodos implícitos se obtiene la solución para el tiempo t_{n+1} a partir de la solución

del tiempo t_n y t_{n+1} , por lo que se requiere solucionar un sistema de ecuaciones por cada incremento de tiempo.

Los métodos explícitos son más fáciles de implementar, pero son condicionalmente estables y tienen un alto coste computacional ya que requieren Δt muy pequeños para asegurar la estabilidad. Por el contrario, aunque los métodos implícitos son más difíciles de implementar y requieren la resolución de un sistema, éstos son mejores en cuanto a estabilidad (en general son incondicionalmente estables) y precisión.

En este trabajo sólo se considerará el método de Bossak, que es un método implícito. Este método es una extensión del método de Newmark.

La ecuación a resolver en el tiempo t_{n+1} es:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_B} = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}_{n+1}) \quad (2.50)$$

Los desplazamientos \mathbf{u}_{n+1} y sus derivadas respecto al tiempo se aproximan según las siguientes formulas:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.52)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_B} = (1 - \alpha_B) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_B \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.53)$$

donde:

- Δt es el incremento de tiempo
- β , γ y α_B son los parámetros que determinan la estabilidad y la precisión. Se usarán los valores que den como resultado orden 2 de convergencia.

$$\alpha_B \in \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] \quad \gamma \in \frac{1-2\alpha_B}{2} \quad \beta \in \frac{(1-\alpha_B)^2}{4} \quad (2.54)$$

Sustituyendo la ecuación 2.53 en la ecuación 2.50, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) + \frac{1 - \alpha_B}{\beta \Delta t} \mathbf{M} \mathbf{u}_{n+1-\alpha_B} - \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}_{n+1}) \\ = \mathbf{M} \left[\frac{1 - \alpha_B}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_n + \frac{1 - \alpha_B}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1 - \alpha_B}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.4 Dinámica de Fluidos Computacional

En el apartado de Dinámica de Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*, CFD) se resume el método de resolución de problemas de fluidos viscosos incompresibles, usando el Método de Elementos Finitos (FEM).

En primer lugar, se comentarán las ecuaciones de gobierno; posteriormente, la forma débil de estas ecuaciones y la discretización del espacio mediante la aproximación por elementos finitos y finalmente, el método de discretización del tiempo usado.

La referencia básica para este apartado es [21] de la bibliografía.

2.4.1 Ecuaciones de gobierno

El movimiento de un fluido es gobernado por el balance de masas y las ecuaciones de momento y energía. Sin embargo, cuando los efectos térmicos pueden considerarse negligibles, la ecuación de la energía no es necesaria y sólo se consideran las de masa y momento. Éstas, al combinarse, resultan en las ecuaciones de Navier-Stokes; que son las que se requiere resolver para obtener el campo de velocidades \mathbf{v} y de presiones p . Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden obtener substituyendo la ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano incompresible (Ec 2.39) en la ecuación de conservación de momento lineal en el marco de referencia Euleriano (Ec 2.23). La forma general de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible de densidad constante ρ en un dominio Ω para un tiempo $t > 0$ son:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

donde:

- ρ es la densidad
- \mathbf{v} es la velocidad
- ∇ es el operador nabra $\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones
- \mathbf{b} son las fuerzas del cuerpo

Si se tiene en cuenta la forma de $\boldsymbol{\sigma}$ (Ec. 2.57), y se substituye en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{v} \quad (2.59)$$

donde:

- p es la presión
- \mathbf{I} es la matriz identidad
- $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de la tensión viscosa
- \mathbb{C} es el tensor constitutivo viscoso para fluidos newtonianos
- ∇^s es el gradiente simétrico

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbb{C} \nabla^s \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Las condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.61)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad (2.62)$$

$$\left(\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right)(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \quad (2.63)$$

donde:

- \mathbf{v}_0 es un vector
- $\boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son campos vectoriales
- \mathbf{n} es el vector normal unitario en dirección hacia fuera de $\partial\Omega$

No se requieren condiciones iniciales para el campo de presiones ya que no aparecen derivadas de tiempo de éste en las ecuaciones de gobierno. En estas ecuaciones, lo único que aparece es la derivada espacial de la presión.

2.4.2 Forma débil

De igual modo que en el apartado de Mecánica de Sólidos Computacional, se aplica el método explicado en el apartado 2.2.2 para obtener la forma débil de las ecuaciones de Navier-Stokes (Ec. 2.60) y, posteriormente, discretizar el espacio. Se puede demostrar que la forma débil de la ecuación de gobierno es la siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \left(\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right) d\partial\Omega \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para ver todo el desarrollo de obtención de la forma débil se recomienda la lectura del capítulo 2.3.2 del documento [21] de la bibliografía.

Para discretizar el espacio se usarán las funciones de forma detalladas en el apartado 2.2.1. Existe una función de forma para la velocidad (\mathbf{v}) y otra para la presión (p), que pueden ser la misma o no. La forma débil discretizada queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{G}p = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (2.65)$$

donde:

- \mathbf{M} es la matriz de masa
- $\mathbf{K}(\mathbf{v})$ es la matriz de rigidez obtenida como \mathbf{K}^c (matriz de rigidez convectiva) + \mathbf{K}^v (matriz de rigidez viscosa)
- \mathbf{G} es la matriz de presión
- \mathbf{f}^{ext} es el vector de fuerzas externas

Los coeficientes de estas matrices se obtienen mediante:

$$M_{ijI} = \delta_{ij} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (2.66)$$

$$K_{ijIJ}^c = \delta_{ij} \int_{\Omega} N_i \mathbf{v}_h \frac{\partial N_j}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.67)$$

$$K_{ijIJ}^v = \delta_{ij} \nu \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N_j}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.68)$$

$$G_{IJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} N_J d\Omega \quad (2.69)$$

$$f_{ii}^{ext} = \int_{\Omega} b_i N_i d\Omega \quad (2.70)$$

Los índices en minúscula i y j se refieren a la dimensión del problema y van de 1 a n_{dim} , mientras que los índices en mayúscula I y J se refieren al número de nodos y van de 1 a n_{nodos} .

Finalmente, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.71)$$

2.4.3 Discretización del tiempo

Tal como se ha explicado en el apartado de discretización del tiempo de Computational Structural Mechanics, existen métodos de discretización explícitos e implícitos. De igual modo que en el caso anterior, para fluidos también se consideraran sólo métodos implícitos. Por lo tanto, la ecuación a resolver en el tiempo t_{n+1} es:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{v}_{n+1})\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{G}\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.72)$$

En este trabajo sólo se considerará el método de Bossak, explicado en el apartado 2.3.3. Teniendo en cuenta la Ec. 2.71 y aplicando el esquema de Bossak, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_{n+1-\alpha_B} + \mathbf{K}(\mathbf{v}_{n+1})\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{G}\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.73)$$

Donde la derivada respecto al tiempo de la velocidad se define:

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1-\alpha_B} = (1 - \alpha_B)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \alpha_B \dot{\mathbf{v}}_n \quad (2.74)$$

Tal como se ha comentado en el apartado de mecánica de sólidos, el esquema de Bossak proviene del método de Newmark. Usando este método, la aceleración puede aproximarse como:

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t \gamma} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n - \Delta t (1 - \gamma) \dot{\mathbf{v}}_n) \quad (2.75)$$

Sustituyendo las Ec. 2.75 en la Ec. 2.74, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{1 - \alpha_B}{\gamma \Delta t} \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{v}_{n+1}) \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{G} \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{f}^{ext} + \frac{1 - \alpha_B}{\gamma \Delta t} \mathbf{M} \mathbf{v}_n + \left[\frac{(1 - \alpha_B)(1 - \gamma)}{\gamma} - \alpha_B \right] \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}_n \\ \mathbf{G}^T \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.76)$$

Los parámetros α_B y γ son los mismos parámetros de integración de Bossak explicados en la sección de discretización de estructuras (2.3.3).

2.5 Interacción Fluido – Estructura

En el apartado de interacción fluido – estructura (*Fluid Structure Interaction, FSI*) se explica el modo en el que se resuelven los problemas donde hay interacción entre una estructura y un fluido. Para ello, primero se explica la formulación Lagrangiana – Euleriana Arbitraria (*Arbitrary Lagrangian – Eulerian, ALE*), usada en el fluido en problemas FSI en lugar de la Euleriana. Posteriormente, se presentan las condiciones de transmisión y las metodologías de acoplamiento FSI. Para terminar, se exponen las técnicas de minimización del residuo.

La referencia básica para este apartado es el documento [21] de la bibliografía. Como información adicional, se recomienda la lectura de los libros de referencia [7] y [2].

2.5.1 Formulación ALE en fluidos

Al resolver un problema FSI, se debe tener en cuenta que la estructura tendrá un desplazamiento debido a las cargas del fluido. Si se considera que el fluido no penetra en el sólido, el desplazamiento de la estructura implica un desplazamiento del fluido en la misma zona.

Cuando el desplazamiento de la estructura es infinitesimal, se puede ignorar el efecto del desplazamiento en la malla. Por lo tanto, se puede resolver el problema usando la formulación Euleriana en la parte del fluido, de igual modo que en los problemas CFD. Por el contrario, cuando el desplazamiento en la estructura es finito, la formulación Euleriana no es una buena aproximación, requiriendo el movimiento de la malla en la interfaz, conduciendo así al empleo de la formulación ALE.

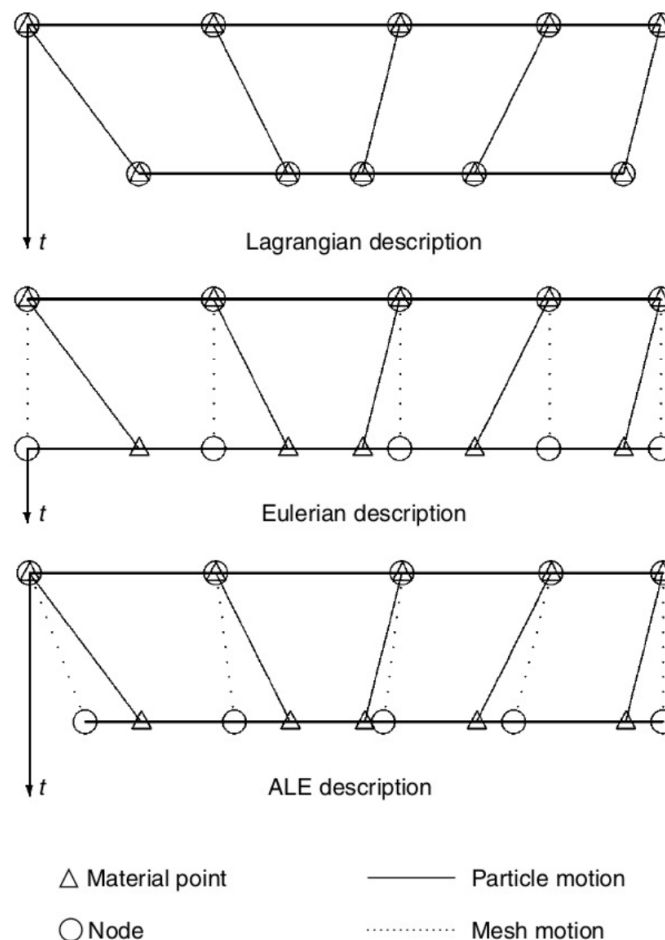


Imagen 2.3 Comparación de las descripciones Lagrangiana, Euleriana y ALE. Imagen extraída de [7]

La característica principal del marco ALE es la aparición de una configuración nueva, la *configuración ALE*, cuyo dominio es $\hat{\Omega}$. Las coordenadas en este dominio se llaman χ . Esto conlleva la aparición de dos movimientos distintos, el *movimiento material* y el *movimiento de la malla* (Imagen 2.3). Estos movimientos se describen respectivamente:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{x} = \hat{\Phi}(\chi, t) \quad (2.77)$$

El desplazamiento de la malla se puede describir:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{x} - \chi = \hat{\Phi}(\chi, t) - \chi \quad (2.78)$$

La velocidad y la aceleración de la malla se pueden obtener realizando la primera y segunda derivada de la ecuación 2.78.

Debido al movimiento del sólido y el fluido (y por lo tanto su interfaz), después de cada iteración FSI se debe actualizar la malla del fluido. Esto implica resolver un problema extra. En función del tipo de malla usada, este varía, pero siempre aparecen las siguientes condiciones de contorno en la interfaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mesh}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_{int} \\ \mathbf{u}_{mesh}(\mathbf{x}, t) &= 0 & \text{en } \Gamma = \Gamma_f^D \cup \Gamma_f^N \end{aligned} \quad (2.79)$$

La primera condición implica que la malla está atada al interfaz fluido – estructura y la segunda implica que no existe movimiento de la malla en el contorno externo del fluido.

En el contorno exterior, el movimiento de la malla solo tiene que ser nulo en la dirección normal (ya que en caso contrario implicaría que la malla saliera de los límites del problema), pero los nodos pueden variar su posición en el plano del contorno.

Existen distintos métodos de actualización de la malla, que se detallan en el documento [7] de la bibliografía. Una de estas técnicas es el *método estructural* o de *rigidez*, dónde el problema se resuelve considerando en la interfaz el movimiento del sólido. Se genera en la malla del fluido, una matriz de rigidez a partir de los coeficientes de Lamé. Este método es muy interesante para problemas FSI ya que cuando menor es el tamaño del elemento, mayor es la rigidez y, dado que los elementos más pequeños se colocan normalmente cerca del dominio del sólido, esta técnica evita la distorsión de los elementos cerca de la interfaz. Para una explicación más detallada de este método se recomienda el documento [1] de la bibliografía.

La ecuación de balance del momento lineal en formulación ALE es la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.80)$$

donde:

- ρ es la densidad del fluido
- \mathbf{v} es la velocidad del fluido
- \mathbf{c} es la velocidad convectiva descrita como $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{malla}$
- $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones
- \mathbf{b} son las fuerzas del cuerpo

Es interesante relacionar esta ecuación con la ecuación 2.56, análoga a ella para problemas de fluidos (en formulación Euleriana). En la ecuación 2.80, el término de velocidad convectiva aparece como la diferencia entre la velocidad del fluido y la velocidad de la malla, ya que ésta también se desplaza. En cambio, en la ecuación 2.56, la velocidad aparece teniendo en cuenta sólo la del fluido ya que la malla no se mueve, por lo que la velocidad convectiva es la misma que la velocidad del fluido.

2.5.2 Condiciones de transmisión

Al tratarse un problema de interacción fluido – estructura, existen dos subdominios, uno para el sólido y el otro para el fluido. Por lo tanto, el dominio total es de la forma $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ donde Ω_f es el dominio del fluido y Ω_s es el dominio del sólido. Esto implica que también se puede diferenciar entre tres superficies del siguiente modo: $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_s \cup \Gamma_{int}$ donde Γ_f es el contorno del fluido, Γ_s es el contorno del sólido y Γ_{int} es la interfaz entre el fluido y la estructura. De igual modo que en el resto del trabajo, la frontera tanto del fluido como del sólido se puede dividir entre Dirichlet (Γ^D) y Neumann (Γ^N).

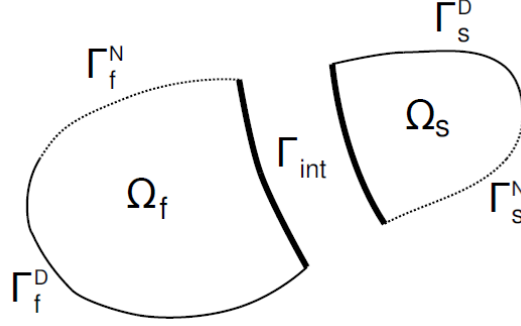


Imagen 2.4 Representación de los dominios y fronteras en un problema FSI. Imagen extraída de [21]

Dado que existe esta separación entre dominios, es muy importante que las condiciones de transmisión estén bien definidas. Estas condiciones postulan cómo se transmite la información entre subdominios. Para el caso FSI, las condiciones de transmisión en la interfaz Γ_{int} son:

- Continuidad de desplazamientos: $u_s = u_f$
- Continuidad de tracciones: $n \cdot \sigma_s = n \cdot \sigma_f$

La continuidad de desplazamientos se puede escribir, de forma equivalente, como continuidad de velocidades. Esto es debido a que todos los componentes del desplazamiento deben ser continuos en la interfaz entre los dos subdominios ya que se ha considerado que el fluido es viscoso.

A continuación, se describen todas las ecuaciones de gobierno del problema FSI:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{mesh}) \cdot \nabla \mathbf{v}_f - \nu_f \Delta \mathbf{v}_f + \nabla p &= \mathbf{b}_s & \text{en } \Omega_f \\
 \nabla \cdot \mathbf{v}_f &= 0 & \text{en } \Omega_f \\
 \rho_{0,s} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} &= \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_{0,s} \mathbf{b}_s & \text{en } \Omega_s \\
 \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) &= \phi(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_f^D \\
 \left(\nu_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right)(\mathbf{x}, t) &= \psi(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_f^N \\
 \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}_s(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_s^D \\
 \mathbf{t}_s(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{t}}_s(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_s^N \\
 \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_{int} \\
 \mathbf{t}_s(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{t}_f(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_{int} \\
 \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_f^0(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Omega_f \text{ y } t=0 \\
 \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}_s^0(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Omega_s \text{ y } t=0
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde:

- \mathbf{v}_i es la velocidad del fluido (f), sólido (s) o malla (mesh)
- \mathbf{u}_i es el desplazamiento del fluido (f) o del sólido (s)
- \bar{x}_i es un dato (u si es posición y t si es tracción)
- \mathbf{t}_i es el vector de tracción superficial del fluido (f) o del sólido (s)
- ν_f es la viscosidad del fluido
- p es la presión
- \mathbf{b}_s son las fuerzas del sólido
- $\rho_{0,s}$ es la densidad del sólido
- \mathbf{P} es el tensor de Piola-Kirchhoff
- $\boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son campos vectoriales que definen la condición de contorno
- \mathbf{n} es el vector normal a una superficie

2.5.3 Técnicas FSI

Las técnicas de resolución de problemas FSI pueden dividirse en dos grandes bloques, las *monolíticas* y las *particionadas*. Las técnicas monolíticas resuelven todas las ecuaciones del problema FSI (Ec. 2.81) en un mismo sistema, mientras que las técnicas particionadas utilizan métodos de resolución independientes para cada campo (fluido y sólido).

Técnicas monolíticas

Estas tienen una gran estabilidad y son muy robustas, por lo tanto, la convergencia es, en general, óptima. Por otro lado, el uso de estas técnicas implica la resolución de un gran sistema de ecuaciones que genera un gran coste computacional en su resolución.

Durante la resolución de este trabajo no se usarán técnicas monolíticas ya que el programa empleado se diseñó para que tuviera capacidad de resolver distintos tipos de problemas; usando cajas negras (*back box*), que se explicarán a continuación. En el caso de utilizar técnicas monolíticas, sería necesaria la implementación de todo el esquema de resolución para el caso específico FSI, limitando la reutilización de código existente.

Técnicas particionadas

Mantienen separada la resolución del fluido de la del sólido.

Éstas técnicas, a su vez, pueden ser divididas entre *técnicas particionadas explícitas* y *técnicas particionadas implícitas*. En las primeras, el intercambio de información entre los dos dominios ocurre al final del paso del tiempo, por lo que el coste computacional es bajo y la convergencia lenta. En las segundas, el algoritmo usado para acoplar el fluido y el sólido se usa de forma iterativa hasta alcanzar un cierto criterio de convergencia. Por lo tanto, las técnicas particionadas implícitas tienen un mayor coste computacional, que en algunos casos es incluso mayor que el de las técnicas monolíticas.

En este trabajo se usará la técnica particionada implícita para resolver los problemas FSI debido a su flexibilidad para resolver distintos problemas sin necesidad de modificar el sistema de resolución. De hecho, se considerará una caja negra donde se le da una información (*input*) y se obtienen los datos calculados (*output*) sin necesidad de acceder a los procedimientos interiores. Para más información sobre el funcionamiento de un esquema FSI con cajas negras (*black box*), se recomienda el documento [3] y [21] de la bibliografía.

En este trabajo se ha usado el esquema Dirichlet – Neumann (D-N) como técnica FSI. A continuación, se detalla su funcionamiento. Para más información sobre otros esquemas, como el esquema Neumann – Neumann, se recomienda la lectura de los documentos [11] y [21] de la bibliografía.

Esquema de acoplamiento Dirichlet – Neumann

Los pasos básicos de este método son:

1. Resolver el problema del fluido a partir de una predicción suficientemente buena de la velocidad en el interfaz entre éste y el sólido. A esta interfaz del fluido se le suponen condiciones de Dirichlet.
2. Obtener el valor de las reacciones en la interfaz.
3. Aplicar las reacciones halladas del fluido a la interfaz del sólido como condición de contorno de Neumann.
4. Resolver el problema del sólido para obtener el desplazamiento en la interfaz.
5. Extraer la velocidad del sólido en la interfaz a partir del desplazamiento de la interfaz para ser aplicada como condición de Dirichlet en la siguiente iteración del fluido.

También se puede resolver aplicando las condiciones de contorno al revés, las de Neumann al fluido y las de Dirichlet al sólido. Esto se puede hacer si la densidad del fluido (ρ_f) es mucho mayor que la del sólido (ρ_s), que no es muy usual en problemas FSI. De igual modo se puede realizar el acoplamiento en función de los desplazamientos.

Para simplificar las ecuaciones, se expresarán de forma compacta según las contribuciones internas y externas. Las ecuaciones 2.49 del sólido de forma compacta tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} S_{II} & S_{IR} \\ S_{RI} & S_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^S \\ \mathbf{f}_R^S \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

donde:

- S_{ij} son los coeficientes de las fuerzas internas del sólido
- \mathbf{f}^S son las fuerzas externas
- \mathbf{u}_I son los grados de libertad del interfaz del sólido
- \mathbf{u}_R son el resto de grados de libertad del sólido

Las ecuaciones 2.71 del fluido de forma compacta son del tipo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{II} & \mathbf{F}_{IR} \\ \mathbf{F}_{RI} & \mathbf{F}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I \\ \mathbf{v}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^F \\ \mathbf{f}_R^F \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

donde:

- \mathbf{F}_{ij} son los coeficientes de las fuerzas internas del líquido
- \mathbf{f}^F son las fuerzas externas
- \mathbf{v}_I son los grados de libertad del interfaz del fluido
- \mathbf{v}_R son el resto de grados de libertad del fluido

Para el caso del fluido, se consideran como grados de libertad (*Degrees of Freedom*, DOF) tanto la velocidad como la presión.

Para obtener la velocidad en el interior del fluido (\mathbf{v}_I^{n+1}) en el tiempo $n + 1$ a partir de la predicción de la velocidad en la interfaz (\mathbf{v}_Γ^*), se resuelve la ecuación:

$$\mathbf{F}_{II}\mathbf{v}_I^{n+1} = \mathbf{f}_I^{F,n+1} - \mathbf{F}_{I\Gamma}\mathbf{v}_\Gamma^* \quad (2.84)$$

Posteriormente, se obtienen las reacciones directamente:

$$\mathbf{f}_\Gamma^{F,n+1} = \mathbf{F}_{\Gamma I}\mathbf{v}_I^{n+1} - \mathbf{F}_{\Gamma\Gamma}\mathbf{v}_\Gamma^* \quad (2.85)$$

Para resolver el problema del sólido, se reescribe en función de la interfaz del fluido:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{II} & \mathbf{S}_{I\Gamma} \\ \mathbf{S}_{\Gamma I} & \mathbf{S}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^{S,n+1} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{S,n+1} - \mathbf{f}_\Gamma^{F,n+1} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

donde:

- $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{n+1}$ es el desplazamiento de la interfaz

El problema acoplado se puede definir como:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{n+1} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{v}_\Gamma^*)) \quad (2.87)$$

donde:

- \mathbf{S} es el operador del problema del solido
- \mathbf{F} es el operador del problema del fluido

Con este esquema, el problema se convierte en un proceso iterativo en cada paso de tiempo. El residuo en la interfaz se puede definir como:

$$\mathbf{r}_{\Gamma,i+1}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{\Gamma,i+1}^{n+1} - \mathbf{v}_{\Gamma,i}^{n+1} \quad (2.88)$$

Una vez obtenido el residuo, existen dos opciones, que exista convergencia, por lo que se avanza al siguiente paso de tiempo; o que no haya convergencia, con lo que se vuelve a empezar con una nueva predicción. El objetivo del problema es hallar el valor tal que el residuo es nulo, las técnicas de minimización del residuo detalladas en el apartado 2.5.5 sirven para acelerar la convergencia de dicho residuo a 0.

En los problemas solucionados con la formulación ALE, se soluciona el problema del desplazamiento de la malla después de solucionar hallar el desplazamiento de la interfaz y previamente a la resolución del fluido.

Para más información sobre el esquema D-N y su aplicación a problemas FSI se recomienda la lectura de los documentos [10], [19] y [21] de la bibliografía.

2.5.4 El efecto de masa añadida

El efecto de masa añadido se asocia a la suposición de fluido incompresible. Se define como la adición de masa virtual a un sistema acoplado debido al movimiento del sólido rodeado por un fluido incompresible. Esta masa virtual aparece en consecuencia de la incompresibilidad del fluido, debido a que las fuerzas de inercia asociadas a la aceleración del cuerpo se trasladan a una región del fluido. Dada la incompresibilidad de estas fuerzas inerciales, se traducen en un aumento virtual de la masa de fluido.

Este efecto ocurre en los problemas FSI que se estudiarán en este trabajo. Estas afectan tanto en técnicas de resolución monolíticas como particionadas del modo que se puede ver en la Imagen 2.5.

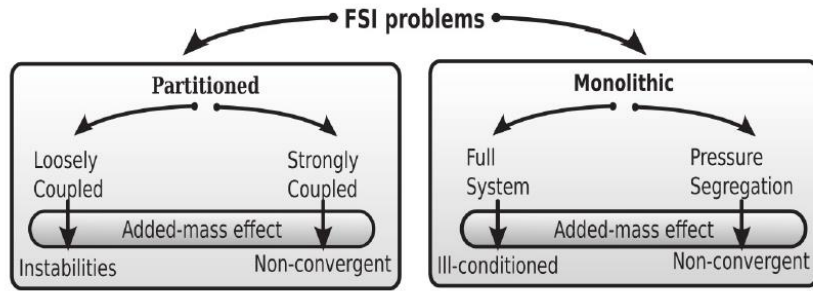


Imagen 2.5 Efecto del efecto de masa añadida a técnicas monolíticas y particionadas. Imagen extraída de [9]

La referencia básica para este apartado es el documento [9] de la bibliografía.

2.5.5 Minimización del residuo FSI

En esta sección se explican distintas técnicas de minimización del residuo en problemas FSI; el método de relajación de Aitken y el Método Multivector de Quasi Newton (*Multivector Quasi Newton method*, MVQN). Estas técnicas son cajas negras, ya que minimizan el residuo iterativamente sin necesidad de acceder al interior de las ecuaciones usadas para resolver el problema del fluido ni del sólido.

Relajación (Aitken)

Es un sistema simple y eficaz. Utiliza información de las dos iteraciones anteriores para calcular el parámetro de relajación w_{i+1} del tiempo actual. Este parámetro puede obtenerse como:

$$w_{i+1} = -w_i \frac{(\mathbf{r}_{\Gamma,i})^T (\mathbf{r}_{\Gamma,i+1} - \mathbf{r}_{\Gamma,i})}{\|\mathbf{r}_{\Gamma,i+1} - \mathbf{r}_{\Gamma,i}\|^2} \quad (2.89)$$

donde:

- $\mathbf{r}_{\Gamma,i+1}$ y $\mathbf{r}_{\Gamma,i}$ son los residuos definidos en la Ec. 2.88

En la primera iteración, el valor del parámetro se debe estimar. Es muy común usar un valor fijo, que en este trabajo será $w_0 = 0.825$. Este valor se usa en el documento [10] como parámetro fijo en problemas similares a los que se resuelven en este trabajo. Es muy usual inicializar el parámetro de relajación en cada paso de tiempo con el último obtenido en el paso de tiempo anterior.

Para más información sobre la relajación de Aitken y su comparación con otros métodos se recomienda la lectura del documento [13] de la bibliografía.

MVQN

En este apartado, se considerará que se calcula para el paso $n + 1$ y el residuo y la incógnita se definen en la interfaz Γ .

Este método está dentro de los métodos de la familia Newton. El método más general de esta familia es el método Newton – Raphson, donde se considera un residuo cualquiera (\mathbf{r}) que resulta de una variable incógnita (\mathbf{u}). El residuo se puede aproximar con la expansión de Taylor de orden uno tal como:

$$\mathbf{r}_{i+1} \approx \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_{i+1}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \quad (2.90)$$

Como lo que se desea es que este residuo sea nulo, la ecuación queda de la forma:

$$-\mathbf{r}_i = \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{u}_{i+1} \quad (2.91)$$

donde:

- \mathbf{J}_i es la matriz Jacobiana, $\mathbf{J}_{i+1} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i+1}}{\partial \mathbf{u}}$

Gracias a esta ecuación, se puede obtener el valor de la corrección $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$. Realizando la suma entre \mathbf{u}_i y $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$, se halla el valor de \mathbf{u}_{i+1} . Es importante remarcar que en este caso la incógnita es el desplazamiento, pero se resolvería de igual modo si fuera la velocidad o el flujo nodal.

En el caso de las cajas negras, se quiere evitar el acceso a las ecuaciones del método de resolución, por lo que es imposible calcular el Jacobiano usando este método. El método MVQN está basado en la misma idea que el de Newton – Raphson pero la inversa del Jacobiano no se calcula explícitamente. Según [3], el método MVQN es un método Quasi – Newton. Se basa en aproximar la inversa del Jacobiano de la ecuación 2.91 con la información almacenada en las *matrices de observación* definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= [\Delta \mathbf{r}_i \ \Delta \mathbf{r}_{i-1} \ \dots \ \Delta \mathbf{r}_2 \ \Delta \mathbf{r}_1] \\ \mathbf{W}_i &= [\Delta \mathbf{u}_i \ \Delta \mathbf{u}_{i-1} \ \dots \ \Delta \mathbf{u}_2 \ \Delta \mathbf{u}_1] \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde:

- $\Delta \mathbf{r}_i = (\tilde{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i) - (\tilde{\mathbf{u}}_{i-1} - \mathbf{u}_{i-1})$
- $\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}$
- $\tilde{\mathbf{u}}_i$ es el valor que aparece en la ecuación 2.87

Se calcula la inversa de la matriz Jacobiana (aproximada) como:

$$\mathbf{J}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{J}_i^n + (\mathbf{W}_i - \mathbf{J}_i^n \mathbf{V}_i)(\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i)^{-1} \mathbf{V}_i^T \quad (2.93)$$

Usando esta aproximación del Jacobiano en la ecuación 2.91 se obtiene la corrección de la solución.

Es importante destacar que el número de vectores en las matrices de observación nunca debe ser mayor que el valor de los grados de libertad de la interfaz para evitar sobredeterminar el problema. [3]

Existen otros métodos de minimización del residuo FSI que no se detallan en este trabajo, pero para más información se recomienda la lectura del libro [17] de referencia.

Capítulo 3

Metodología

En este apartado se presentan los distintos programas usados durante el desarrollo de este trabajo así como el equipo utilizado para realizar los cálculos.

3.1 Kratos Multiphysics

Kratos Multiphysics es un entorno de desarrollo *open-source* enfocado a la implementación de técnicas numéricas para la resolución de problemas de ingeniería. Este programa está desarrollado y mantenido por el equipo de investigadores del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), con sede en Barcelona.

El *software* está formado por distintos módulos para facilitar el trabajo colaborativo entre un gran equipo. Las herramientas y procedimientos más estándares (bases de datos, álgebra lineal o buscadores), están implementadas en su núcleo y se pueden usar cuando se desarrollan nuevas aplicaciones para el programa. Además, los desarrolladores de Kratos Multiphysics intentan optimizar y minimizar el coste computacional en las operaciones. Debido a este motivo, tiene dos niveles de implementación; uno codificado en Python y otro más complejo codificado en C++. Gran parte del código del programa está desarrollado en lenguaje C++ debido a que éste es mucho más eficiente, y el *scripting* está desarrollado en Python ya que es más sencillo de usar.

Otra herramienta muy útil que existe en Kratos Multiphysics es la paralelización MPI. Ésta se usa si hay distintos procesadores solucionando el mismo problema a la vez, ya que deben “comunicarse” entre ellos el trabajo que están haciendo. También existe la paralelización open MP, que determina como se distribuyen las tareas en un mismo procesador; usada en este trabajo.

En este trabajo se usa el programa Kratos Multiphysics como herramienta de cálculo para resolver los problemas FSI, CSM y CFD.

Para más información acerca del programa, se recomienda consultar su página web [6] o la lectura del documento [5] de la bibliografía.

3.2 GiD

GiD v13 es un software comercial que se usa en este trabajo para el pre y post proceso. Éste también es desarrollado por investigadores de CIMNE. Se puede usar en combinación con el programa Kratos a partir de su *problemtype*. El *problemtype* GiD Kratos permite introducir la geometría, el tipo de material y sus propiedades, así como las condiciones de contorno a usar.

El GiD es un sistema CAD, por lo que cuenta con herramientas de dibujo, que utiliza las superficies NURBS para definir la geometría en el preproceso. Además, permite la generación de mallas para superficies y volúmenes. También se pueden definir las características de estas mallas; por ejemplo, pueden ser estructuradas, semi – estructuradas, no estructuradas; lineales o cuadráticos; formadas por triángulos, cuadriláteros, tetraedros o hexaedros; entre otras. El programa se puede usar tanto en 2D como en 3D.

Para el postproceso existen distintos tipos de visualización de los resultados. Entre estos están el de contorno relleno, líneas de contorno, grafiado de vectores, isosuperficies, etcétera. También tiene la opción de tomar fotos de los distintos pasos de tiempo o grabar videos de los resultados (por ejemplo, del movimiento). Adicionalmente, el programa soporta la creación de gráficos, por ejemplo, de la evolución de un punto durante el problema.

Para más información acerca del programa, se recomienda consultar su página web [12].

3.3 Equipo de trabajo

Este trabajo se ha desarrollado utilizando un equipo Hewlett-Packard envy con sistema operativo Windows 10 Home 64 bits, procesador Core i7-7500U CPU 2.70 GHz, 8 GB de RAM.

Capítulo 4

Pruebas y resultados

En este apartado se explican los distintos tests que se han llevado a cabo con el software Kratos Multiphysics para verificar el correcto funcionamiento de los recientes desarrollos. Para ello, se han resuelto dos problemas en 2D y uno 3D de resultado conocido. Para cada uno de ellos se expone su geometría y las propiedades tanto del sólido como del fluido, y se comentan los resultados obtenidos, comparándolos con el resultado exacto.

4.1 Canal con un muro flexible en 2D

4.1.1 Descripción

Este problema, expuesto en el documento [14] de la bibliografía, fue propuesto por Mok en 2001. Su resolución no es trivial dado que la densidad del fluido y de la estructura tienen un orden de magnitud similar. Debido a esto, hay una gran interacción entre los dos materiales.

Consiste en un canal en 2D por donde pasa el fluido, que contiene un muro flexible en su pared inferior que influye en el movimiento del fluido. Se puede ver la geometría y las condiciones de contorno del problema en la siguiente imagen:

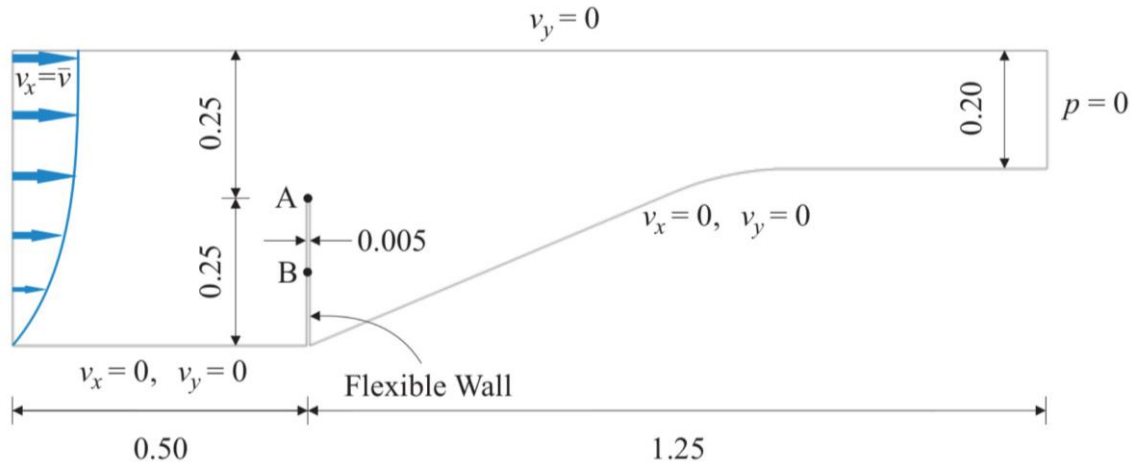


Imagen 4.1 Geometría y condiciones de contorno del problema de Mok. Imagen extraída de [19]

Tal como se puede apreciar en la Imagen 4.1, las condiciones de contorno son las siguientes:

- La pared superior se considera contorno deslizante (*slip boundary*), mientras que la pared inferior se considera contorno con velocidad nula (*non-slip boundary*)
- La presión es nula en la cara derecha de la conducción
- El flujo entra por la cara izquierda de la conducción en forma de parábola siguiendo la ecuación:

$$v(y, t) = 4\bar{v}y(1 - y) \quad (4.1)$$

Donde \bar{v} es un parámetro que depende del tiempo de la forma expuesta a continuación:

$$\bar{v} = \begin{cases} \frac{0.06067}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right) & \text{si } t \leq 2 \\ 0.06067 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.2)$$

Las propiedades del fluido y la estructura son las siguientes:

- Se usará la ley constitutiva de fluidos newtonianos para el fluido
- Se usará la ley constitutiva de elasticidad lineal para el muro
- Se considerará que el desplazamiento no es lineal debido a los grandes desplazamientos esperados
- Densidad del fluido $\rho_f = 956 \text{ kg/m}^3$
- Densidad del sólido $\rho_s = 1500 \text{ kg/m}^3$
- Viscosidad dinámica del fluido $\mu_f = 0.145 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Módulo de Young del sólido $E_s = 2.3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
- Coeficiente de Poisson del sólido $\nu = 0.45$

Para ambos problemas, la estructura y el fluido, se usará el esquema de Bossak explicado anteriormente.

4.1.2 Resultados

Se ha calculado el problema desde $t = 0$ hasta $t = 25$ segundos con un paso de tiempo $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. La malla usada está formada por 4.059 nodos. Los elementos son triangulares en el caso del fluido (3.554 nodos) y rectangulares en el caso del sólido (505 nodos). Se ha creado la malla de modo que, en la zona de la interfaz, los nodos del fluido estén situados en el mismo punto que los nodos del sólido. En el caso de este problema, tanto la geometría, como las propiedades y la malla venían definidas en el programa como un problema tipo, por lo que se verificará si el resultado es correcto.

Para comprobar si el resultado obtenido es el correcto, se comparan los valores obtenidos del desplazamiento en el eje x (u_x) y la presión (p) en los puntos A y B señalados en la Imagen 4.1 con los valores de referencia, tanto los expuestos en el documento [14] como los resultados obtenidos por Valdés [19]. Estos dos puntos están situados en la cara izquierda del muro flexible.

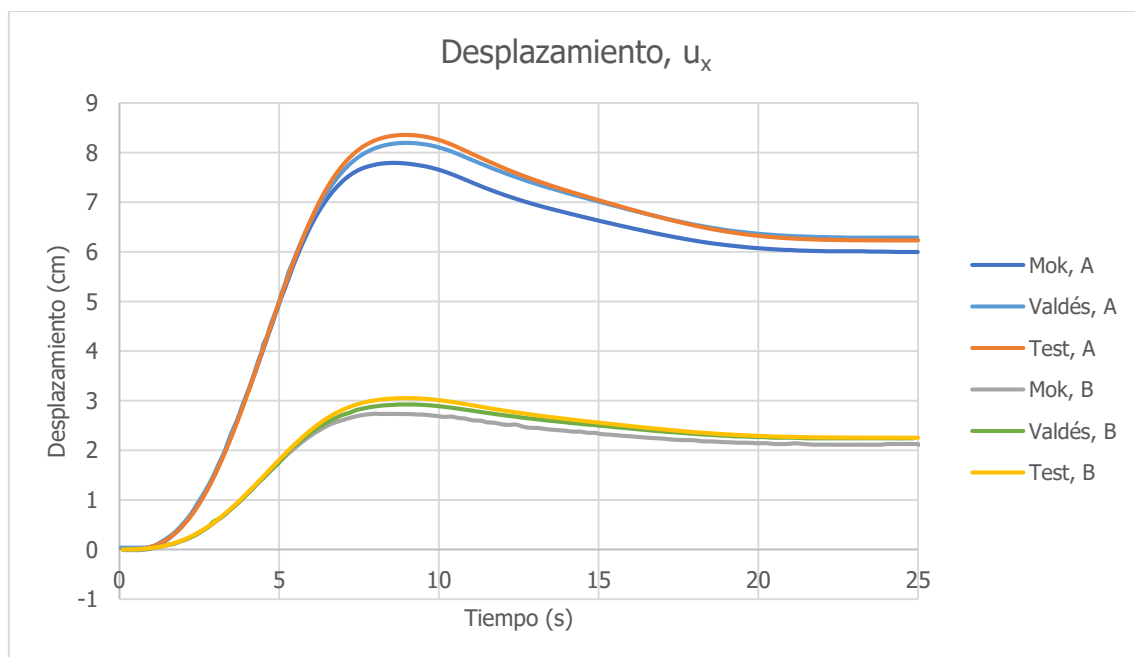


Figura 4.1 Comparación del desplazamiento en x

En la Figura 4.1 se pueden ver los resultados obtenidos en cuanto al desplazamiento en el eje x comparados con los resultados teóricos. Se puede observar que, durante los primeros segundos, el resultado es prácticamente exacto. A partir del segundo 7 aproximadamente, el valor obtenido mediante el programa Kratos Multiphysics es un poco superior al valor de referencia que proporciona Mok, pero evolucionan siguiendo la misma curva que el resultado de referencia. Si se comparan los resultados con los expuestos por Valdés, se puede ver que los valores son extremadamente similares, por lo que podemos suponer que los resultados obtenidos son suficientemente buenos. Es interesante remarcar que, a mayor desplazamiento (debido a que el punto A está más lejos de la zona empotrada), mayor error.

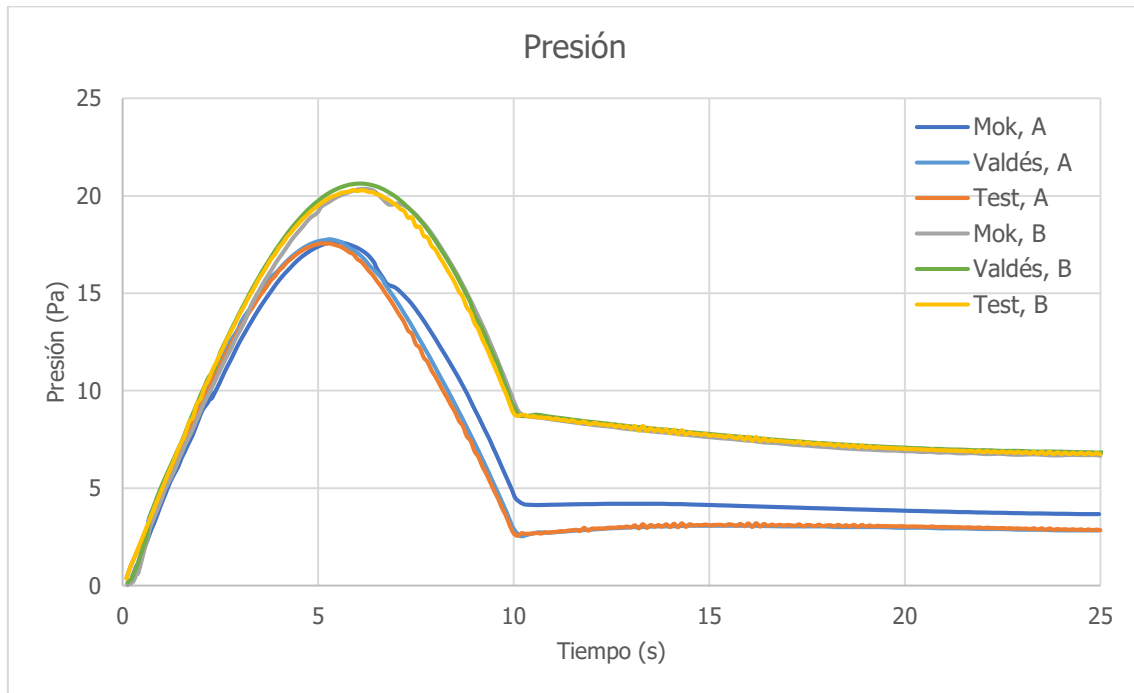
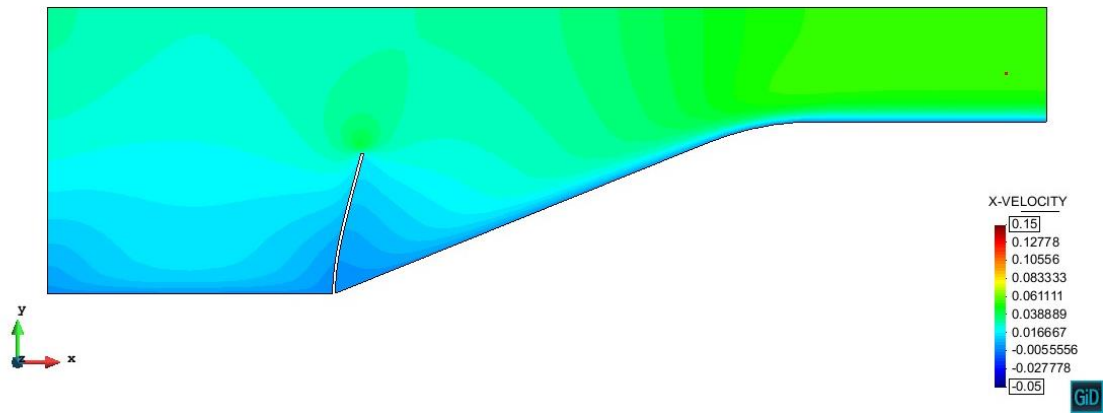


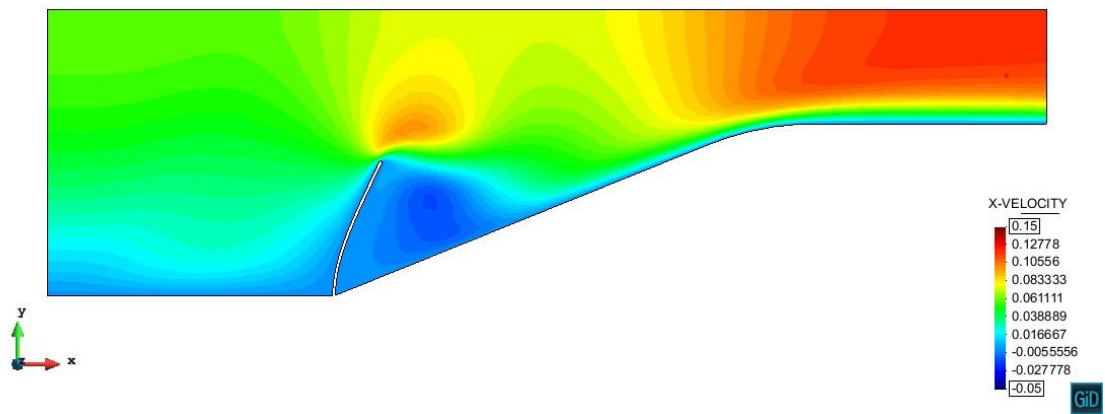
Figura 4.2 Comparación de la presión

Se ha realizado la misma comparación para la presión, de modo que en la Figura 4.2 se pueden ver los resultados obtenidos comparados con los resultados teóricos. Se puede ver que, para el punto B, el resultado obtenido prácticamente encaja con los resultados de referencia. En cambio, para el punto A, entre los segundos 5.5 y 12 aproximadamente, el resultado obtenido es inferior al esperado si se compara con los valores del test realizado por Mok. Por otro lado, si se compara con los valores expuestos por Valdés, se puede observar que ambas curvas son muy similares. Como conclusión, se puede suponer que los resultados obtenidos para la presión también son suficientemente buenos. Si se compara el error obtenido en el punto A y el punto B para el mismo instante de tiempo, de igual modo que para el desplazamiento, a mayor distancia respecto al empotramiento, mayor error. Es de suponer, que esto es debido a que, en la zona más alejada del empotramiento, el desplazamiento es mayor, por lo que los nodos de la interfaz se desplazan más.

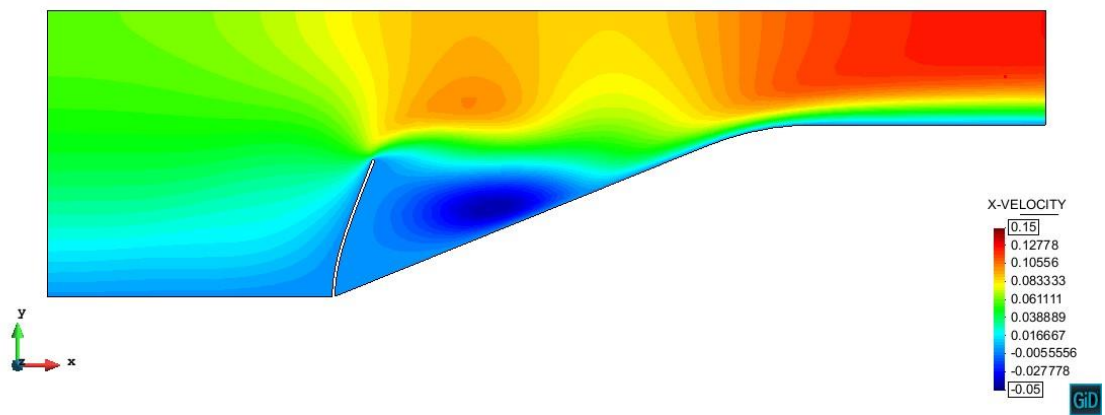
Para entender mejor la distribución de la velocidad en el eje x (v_x) y la presión (p) en todo el canal a lo largo del tiempo, se han tomado algunas instantáneas que se comentarán a continuación. Se ha usado la velocidad en lugar del desplazamiento ya que ambas representan el mismo parámetro y a la primera, visualmente, se le puede extraer más información.



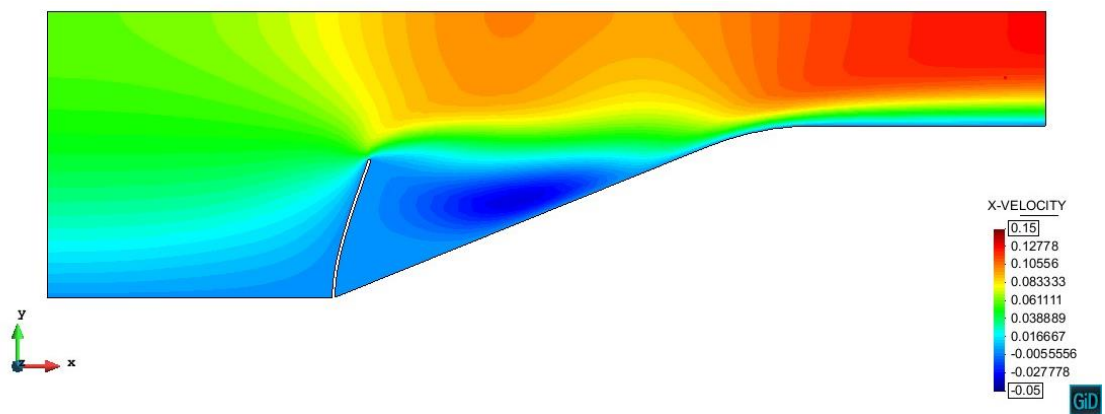
(a) $t = 5 \text{ s}$



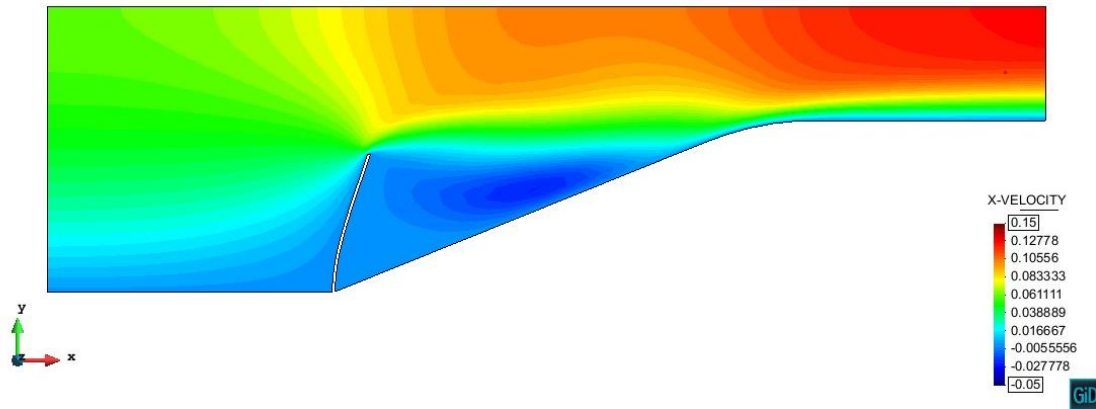
(b) $t = 10 \text{ s}$



(c) $t = 15 \text{ s}$



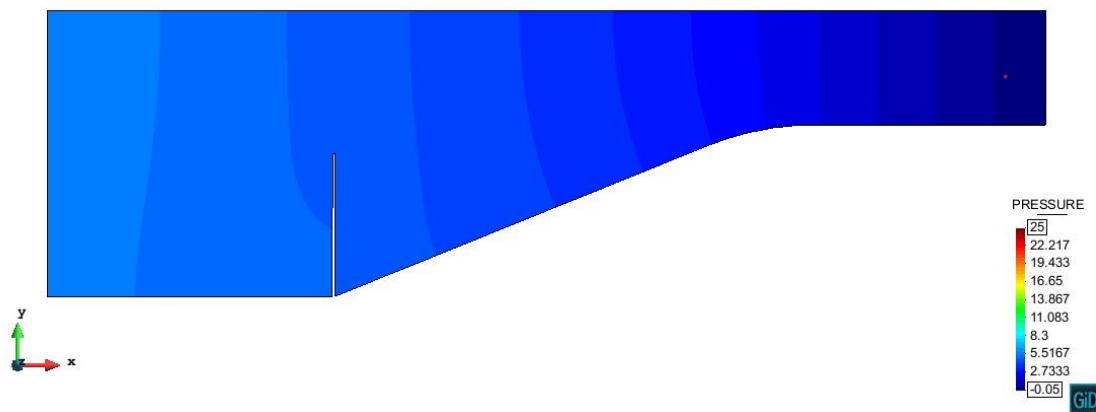
(d) $t = 20 \text{ s}$



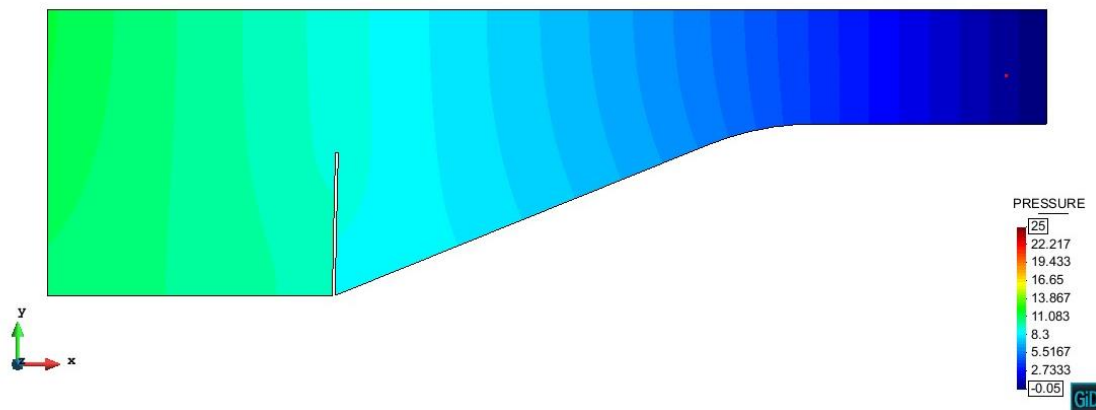
(e) $t = 25 \text{ s}$

Imagen 4.2 Evolución de la velocidad en x [m/s] (deformación a escala real)

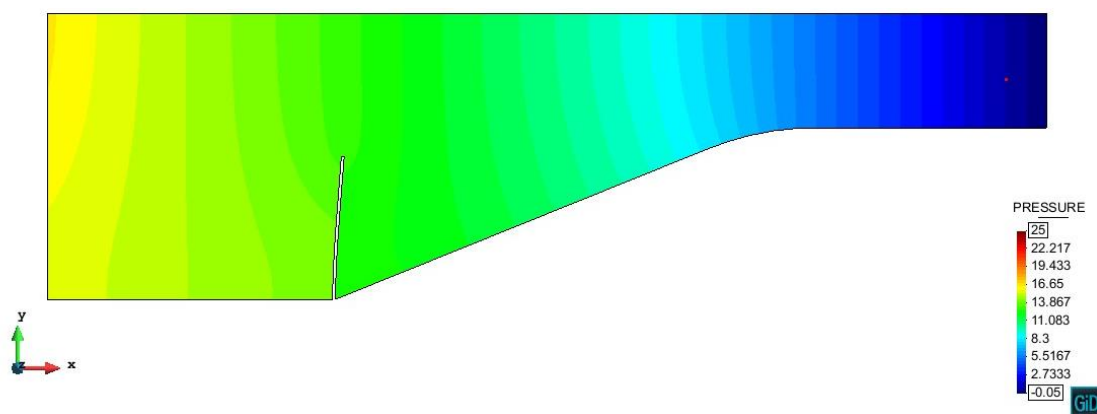
A partir de estas fotos, se pueden ver los efectos del muro en el movimiento del fluido. Éstos se aprecian, sobre todo, en la cara derecha del muro. En la zona del canal situada a su derecha se forma un vórtice, que tiene como consecuencia que en algunos puntos el fluido se mueva de derecha a izquierda, obteniendo una velocidad negativa. Por la parte superior del canal se puede ver un gradiente de velocidades creciente a medida que se aleja de la zona de entrada. A partir de estas imágenes, se puede comprobar que, al disminuir la sección de paso, la velocidad del fluido aumenta.



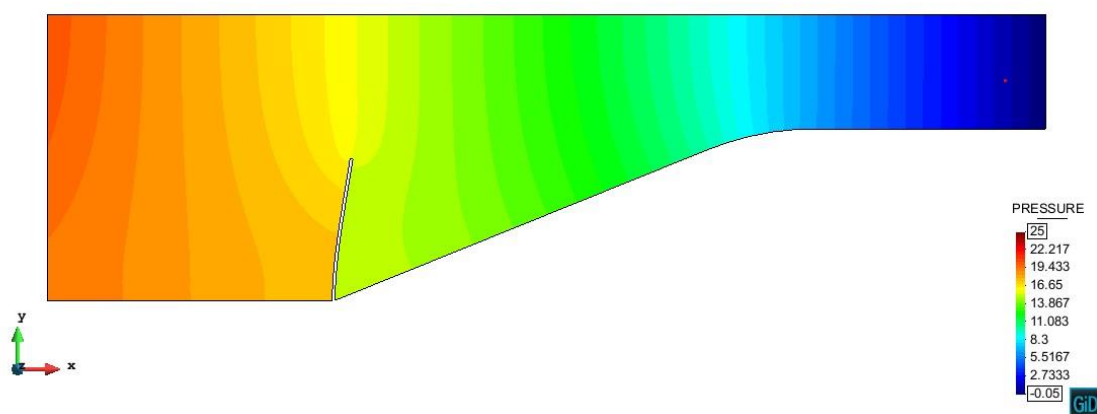
(a) $t = 1 \text{ s}$



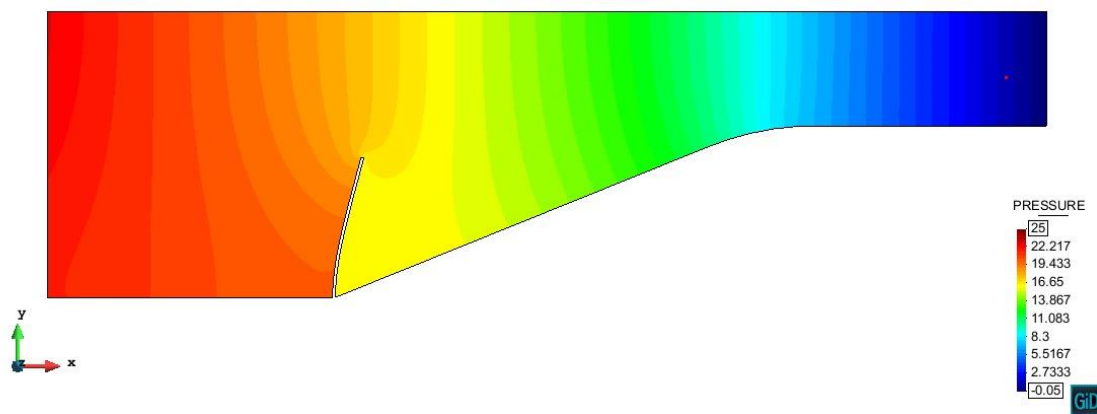
(b) $t = 2 \text{ s}$



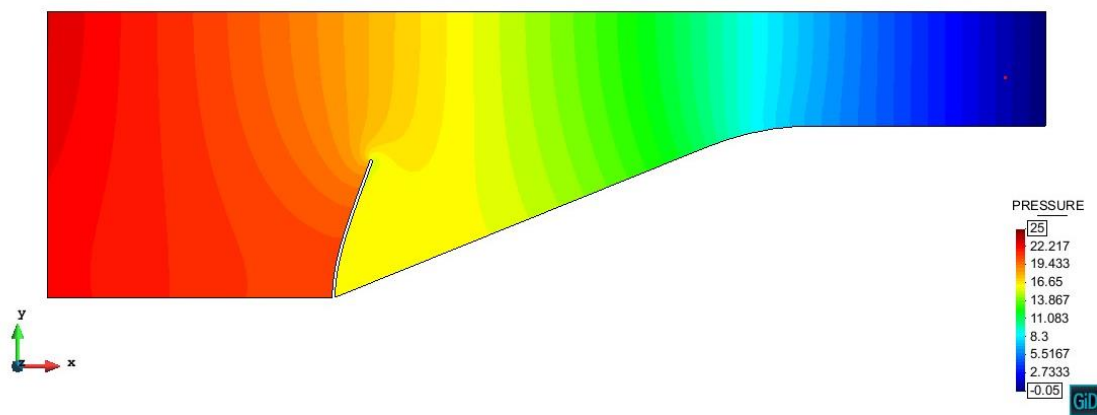
(c) $t = 3 \text{ s}$



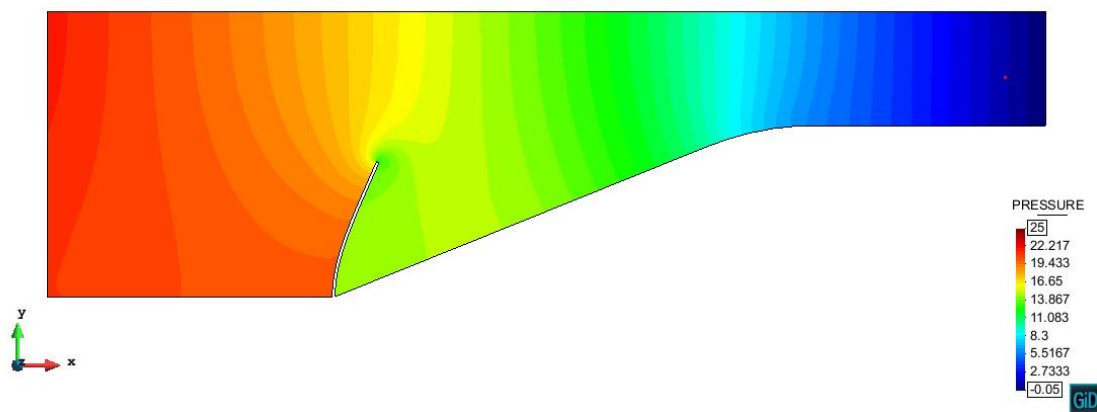
(d) $t = 4 \text{ s}$



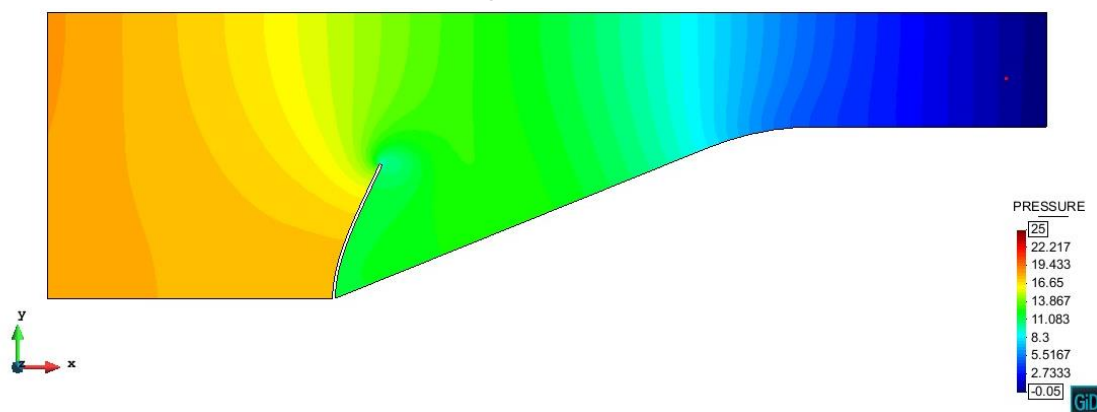
(e) $t = 5 \text{ s}$



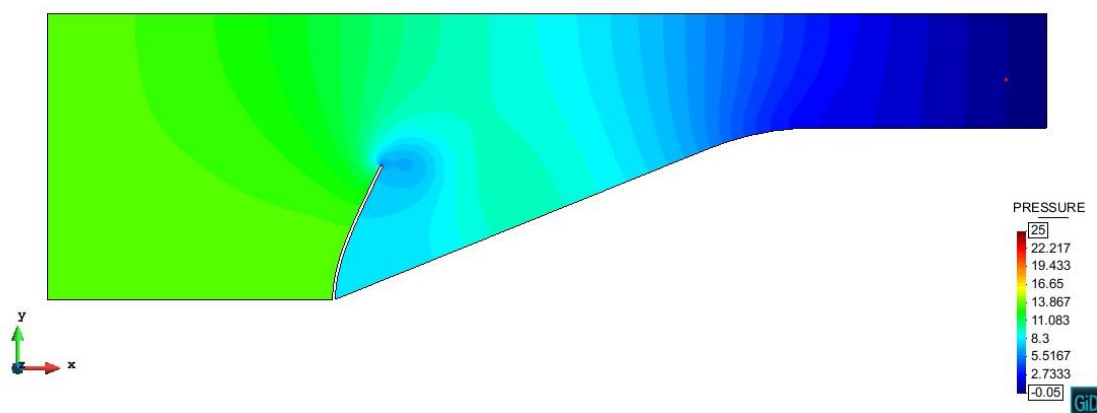
(f) $t = 6 \text{ s}$



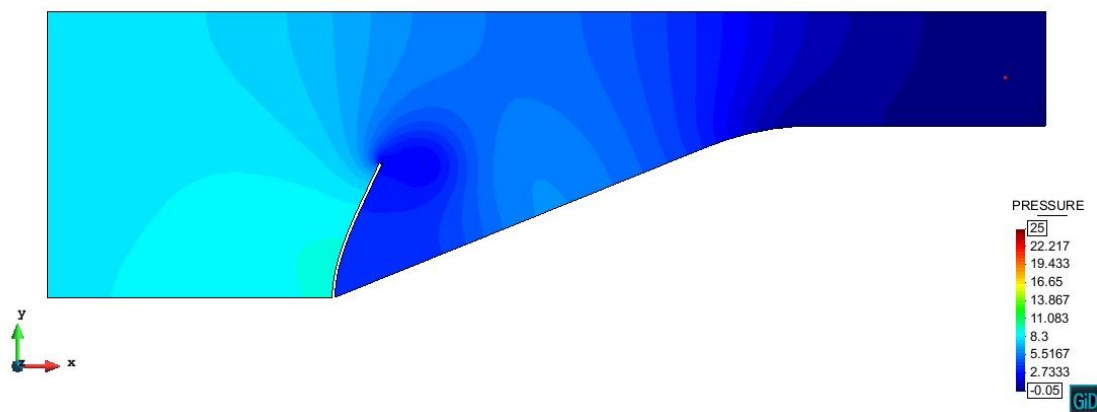
(g) $t = 7 \text{ s}$



(h) $t = 8 \text{ s}$



(i) $t = 9 \text{ s}$



(j) $t = 10 \text{ s}$

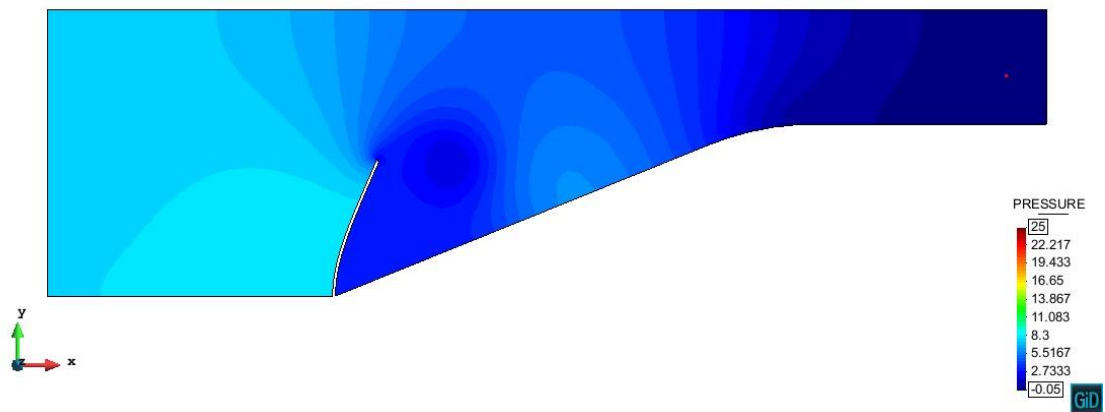
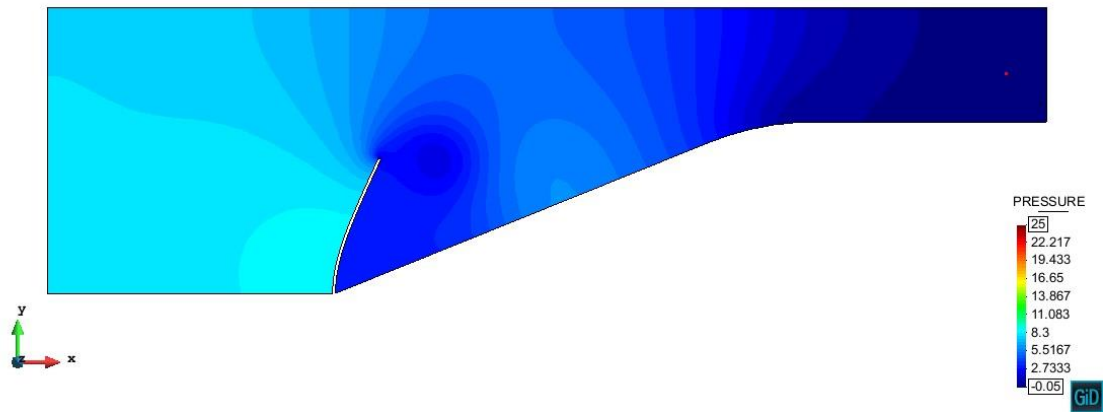


Imagen 4.3 Evolución de la presión [Pa] (deformación a escala real)

Durante los primeros 10 segundos, existe un gradiente de presión significativo a lo largo del canal, que, además, varía rápidamente. Debido a esto, son necesarias imágenes cada pocos segundos para apreciar esta evolución. A partir de $t = 10 \text{ s}$, cuando el flujo empieza a ser constante, la presión se estabiliza rápidamente.

Es interesante remarcar la gran diferencia de presiones a ambos lados del muro siendo ésta muy superior aguas arriba.

En todas las imágenes se el desplazamiento que se aprecia es a escala real.

4.2 Canal con muro flexible en 3D

4.2.1 Descripción

Después de calcular el problema propuesto por Mok en 2D, se decidió realizar el mismo cálculo en 3D para probar el buen funcionamiento del programa Kratos Multiphysics en este tipo de problemas. Tanto la geometría como muchas de las condiciones de contorno usadas son las mismas que las expuestas para el caso 2D. Debido a que, al ser un problema en 3D, el coste computacional es mucho mayor, se decidió doblar la densidad del sólido para reducir el acoplamiento entre los dos materiales y así limitar el número de iteraciones necesarias. También se modificó el módulo de Young del sólido a 2.3×10^8 N/m² ya que, de este modo, aplicando la misma tensión, la estructura se deforma menos.

4.2.2 Resultados

De igual modo que en el caso 2D, en el programa venían definidas la malla y las propiedades del problema como un problema tipo. La malla generada en 3D a partir de la programación de los investigadores de CIMNE es la que aparece en la Imagen 4.4, formada por 125.124 nodos.

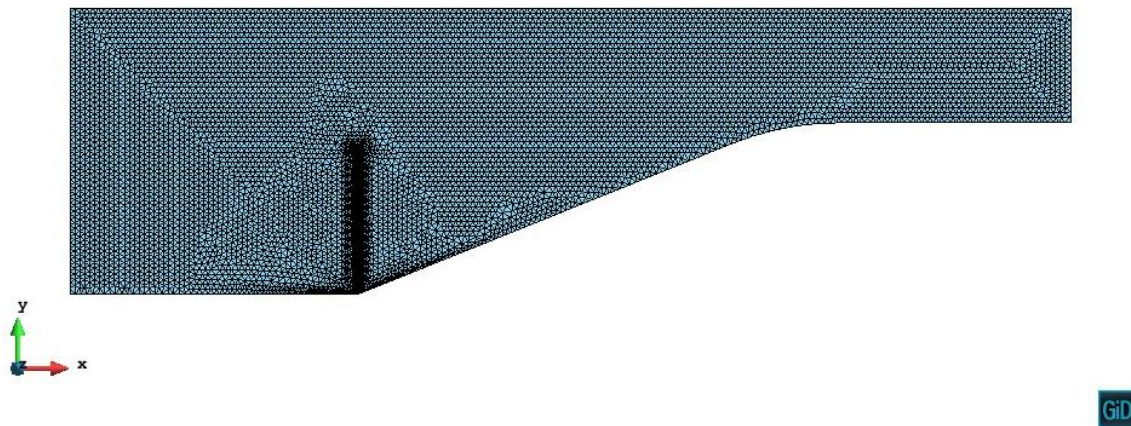


Imagen 4.4 Plano xy de la malla del Mok en 3D

En primer lugar, se observa que todos los pasos de tiempo convergen. Adicionalmente, el desplazamiento de la malla del fluido tiene la forma correcta (Imagen 4.5). En la parte superior se aprecia un mayor desplazamiento y al su alrededor, se va reduciendo de una forma radial, como es esperable.

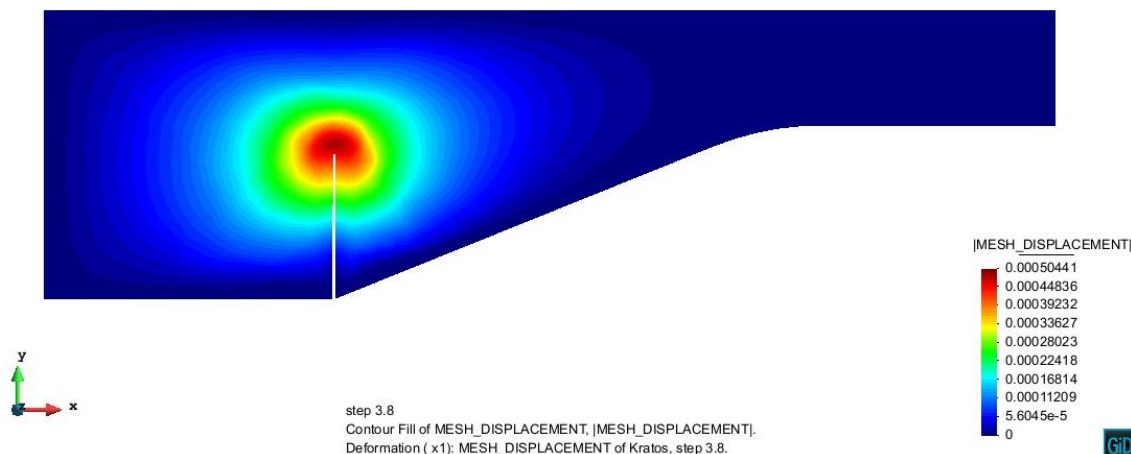


Imagen 4.5 Desplazamiento de la malla del fluido del Mok en 3D (segundo 3.8)

En el caso 3D también se han realizado gráficos del desplazamiento en el eje x (u_x) y la presión (p). Por limitaciones del hardware utilizado no se ha podido extender el proceso de cálculo hasta el segundo 25 (se han requerido 7 días para alcanzar 7.7 segundos de cálculo). Se debe recordar que no se pueden comparar los valores de los resultados obtenidos en este caso con el caso en 2D debido a la modificación realizada en algunos parámetros. Aun así, se puede ver que ambos gráficos siguen la misma tendencia que en el caso anterior, por lo que se puede suponer que los resultados obtenidos son correctos.

En el caso del desplazamiento, se puede apreciar en el gráfico (Figura 4.3) que la línea presenta pequeñas oscilaciones durante los primeros tres segundos en el punto A, cosa que no debería ocurrir. En contraposición, en el caso de 2D (Figura 4.1), estas oscilaciones no ocurrían.

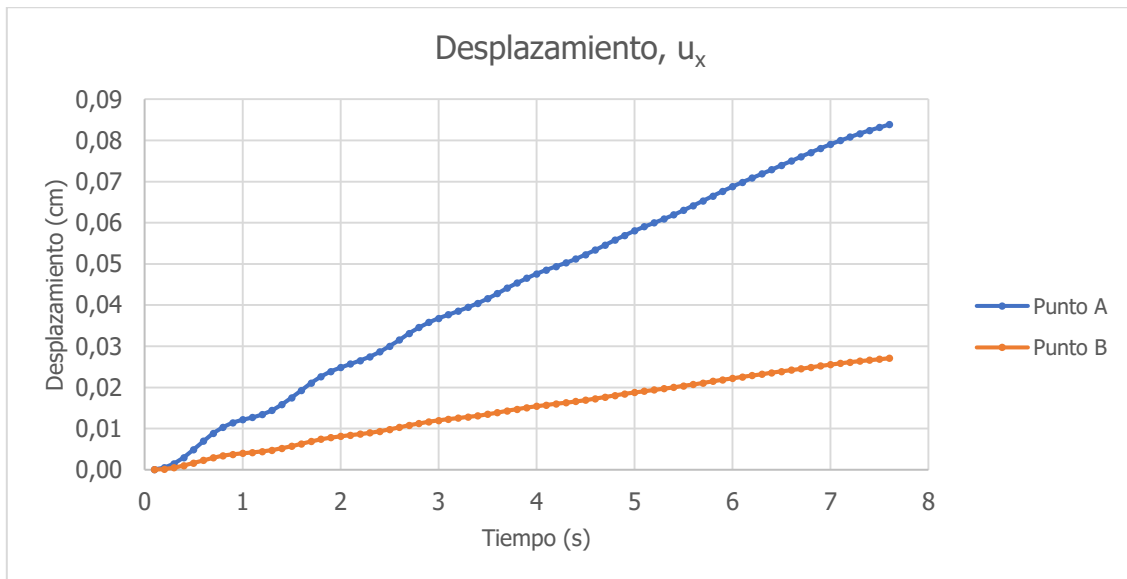


Figura 4.3 Desplazamiento en x

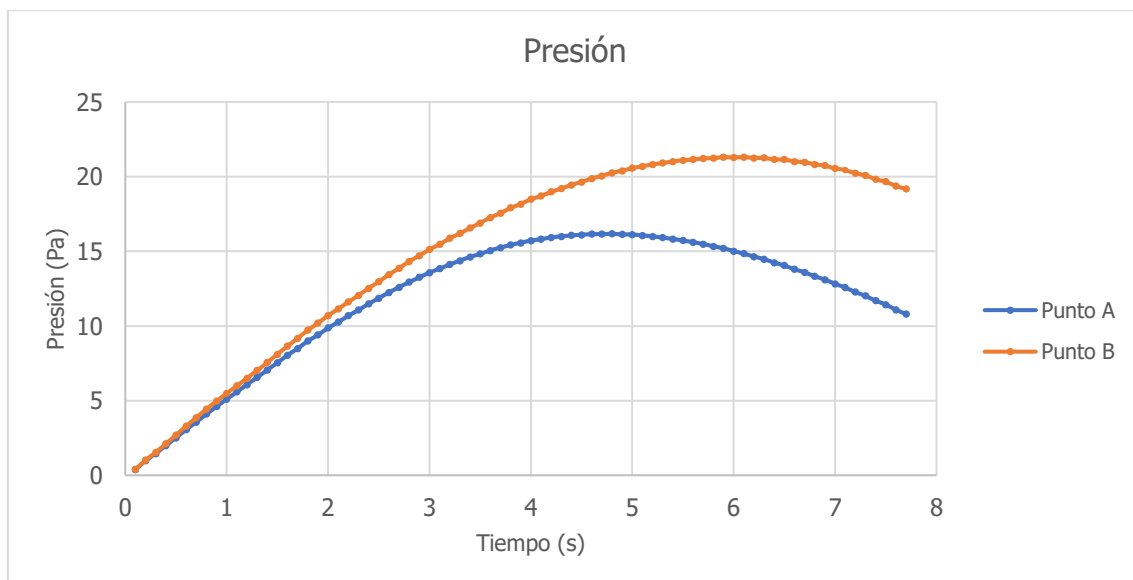
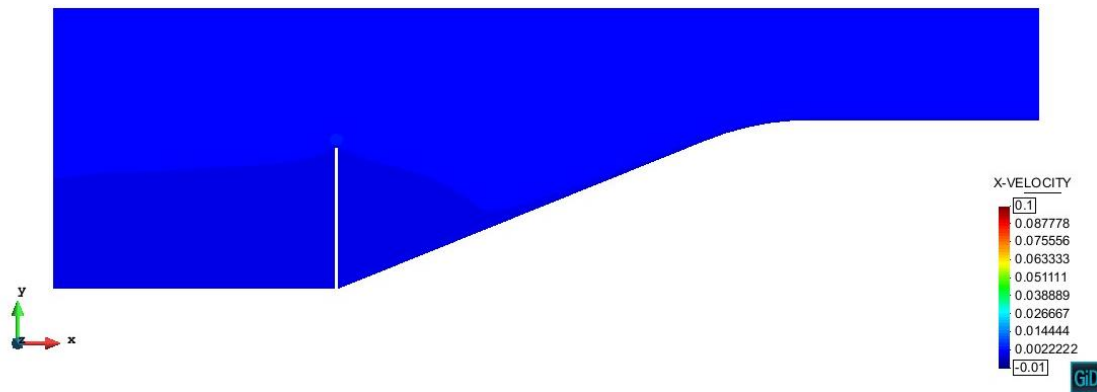


Figura 4.4 Presión

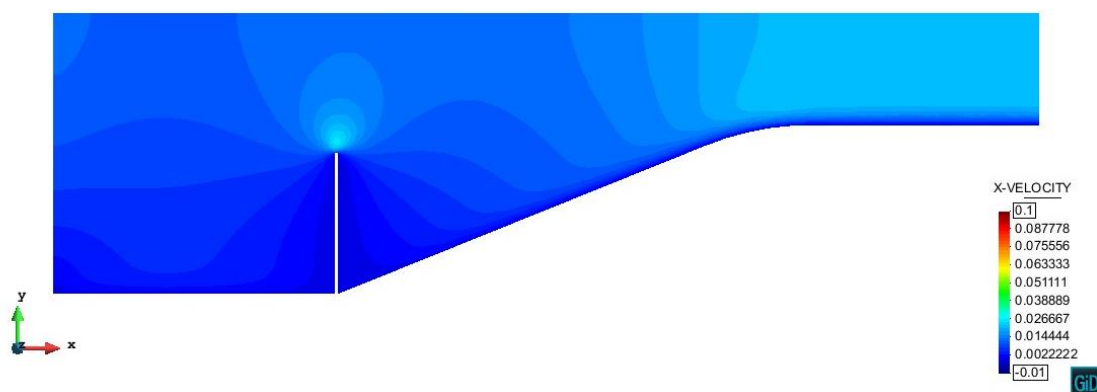
De igual modo que en el caso 2D, se han tomado instantáneas de la velocidad en el eje x (v_x) y la presión (p) a lo largo del canal para entender mejor su distribución.



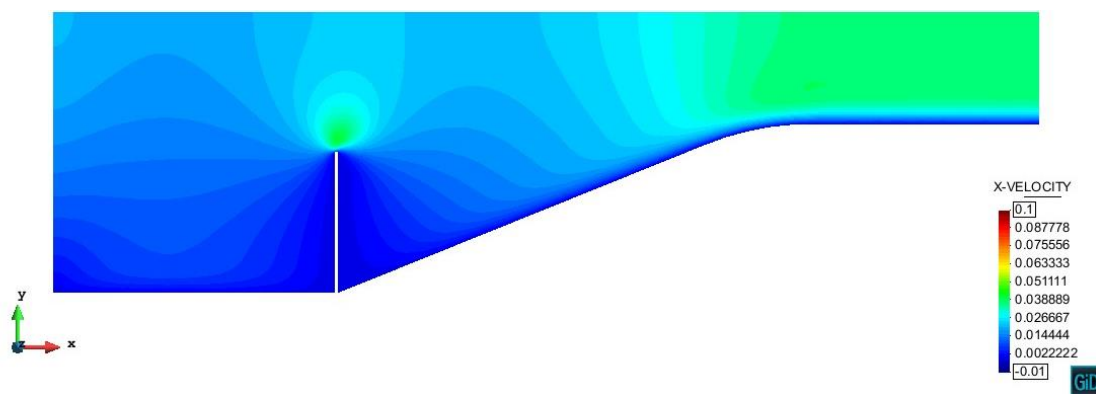
(a) $t = 1 \text{ s}$



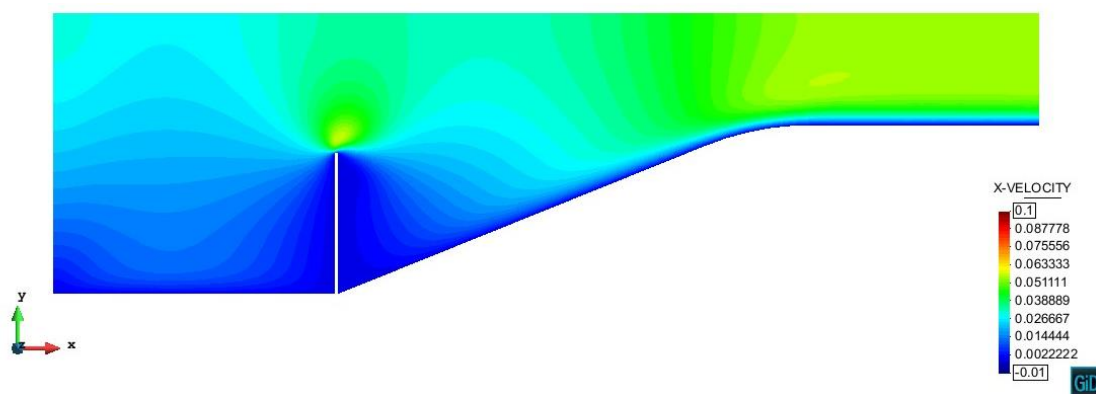
(b) $t = 2 \text{ s}$



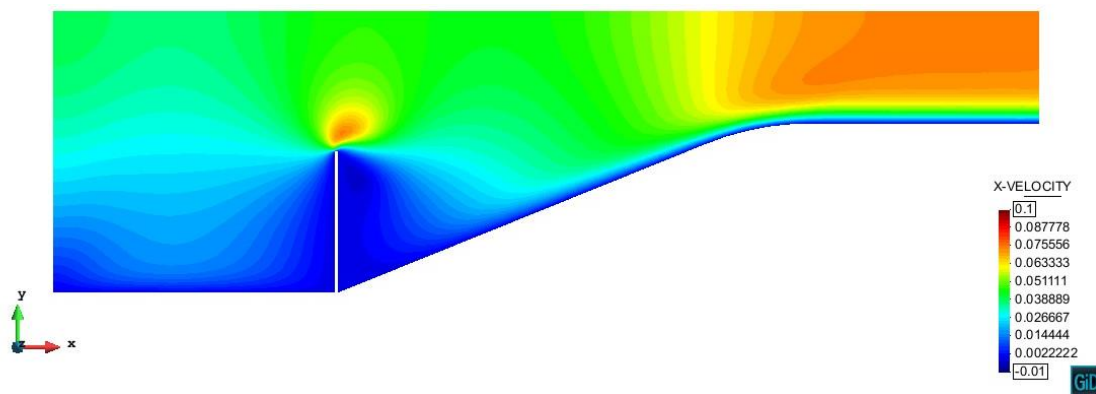
(c) $t = 3 \text{ s}$



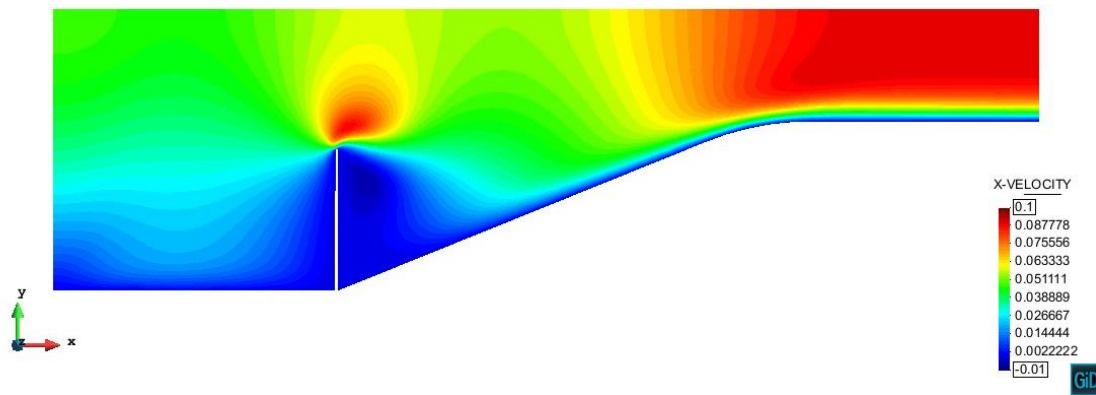
(d) $t = 4 \text{ s}$



(e) $t = 5 \text{ s}$



(f) $t = 6 \text{ s}$



(g) $t = 7 \text{ s}$

Imagen 4.6 Evolución de la velocidad en x [m/s] (deformación a escala real)

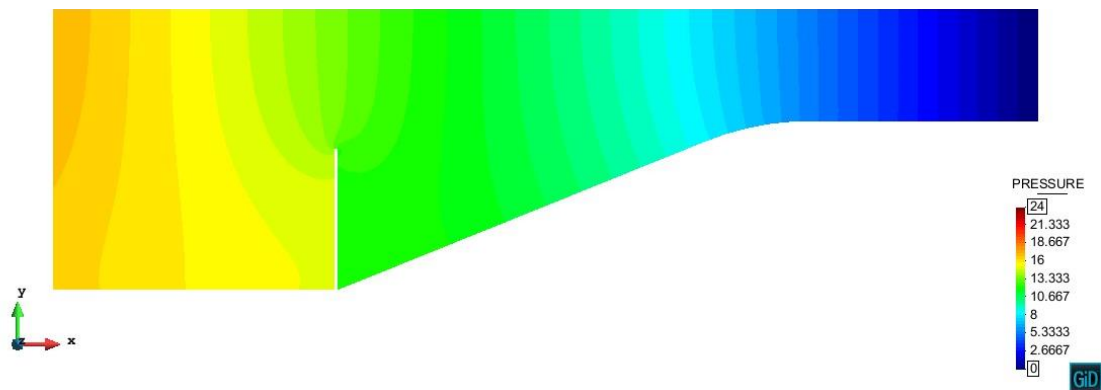
Dado que en este caso no se ha podido alcanzar un periodo de cálculo de 25 segundos, las imágenes anteriores se han tomado a cada segundo. A partir de estas instantáneas se puede ver que la evolución de la velocidad a lo largo del canal es la esperada.



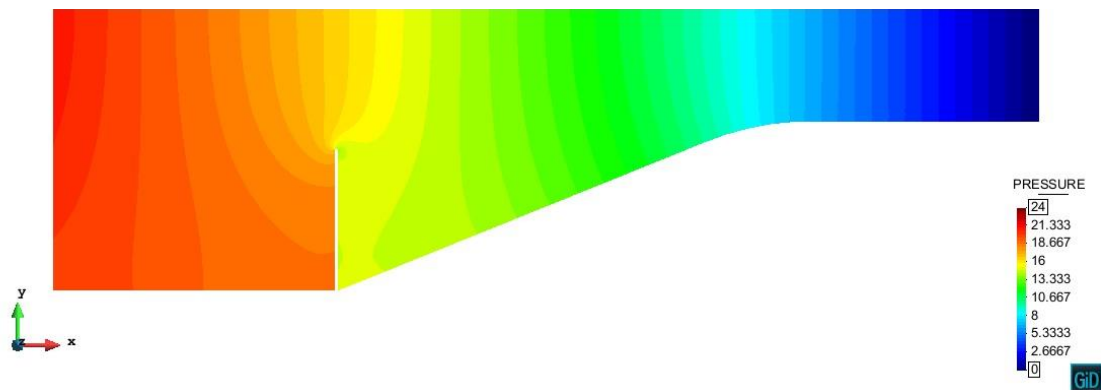
(a) $t = 1\text{ s}$



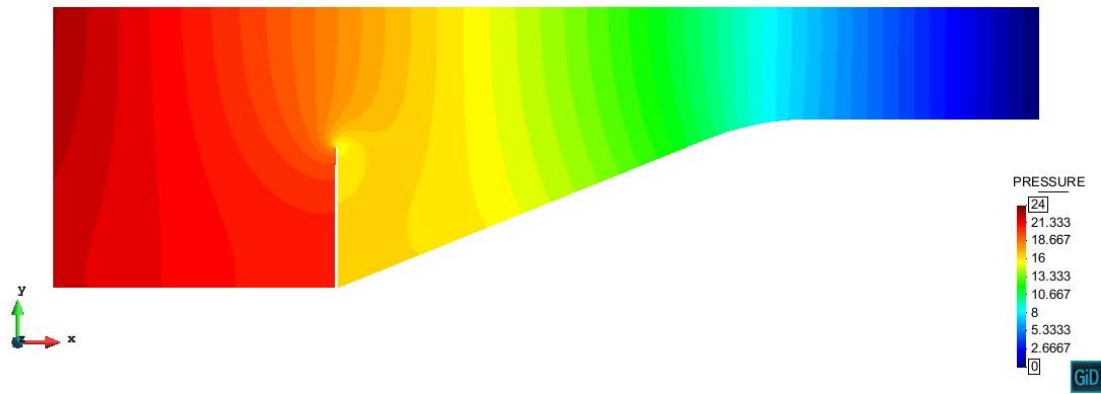
(b) $t = 2\text{ s}$



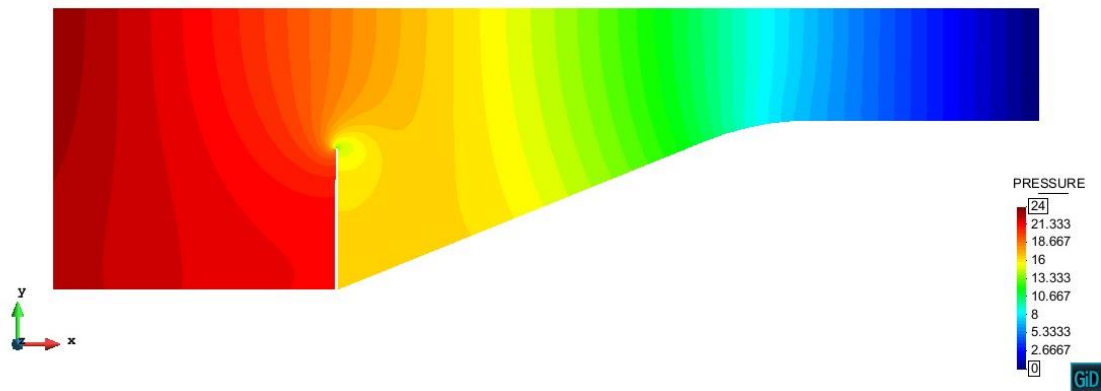
(c) $t = 3\text{ s}$



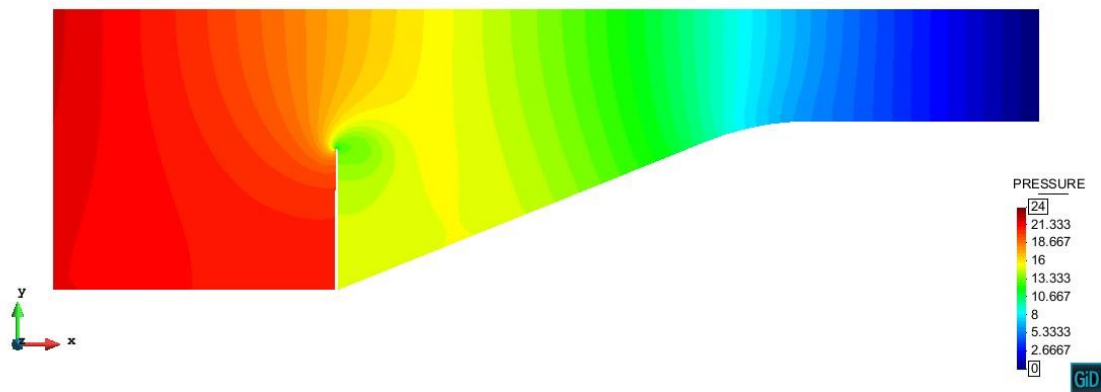
(d) $t = 4\text{ s}$



(e) $t = 5 \text{ s}$



(f) $t = 6 \text{ s}$



(g) $t = 7 \text{ s}$

Imagen 4.7 Evolución de la presión [Pa] (deformación a escala real)

En el caso de la presión se han tomado instantáneas a cada segundo de igual modo que en el caso en 2D. Los resultados obtenidos hasta el último segundo calculado son los esperados, aunque no se ha podido llegar hasta la estabilización de la presión por limitaciones del hardware.

Es interesante ver la diferencia de desplazamiento de la bandera en este problema con respecto al caso 2D donde el módulo de Young era 100 veces menor. En el caso 2D el desplazamiento era mucho mayor. En todas las imágenes se ha usado una escala de deformación 1:1.

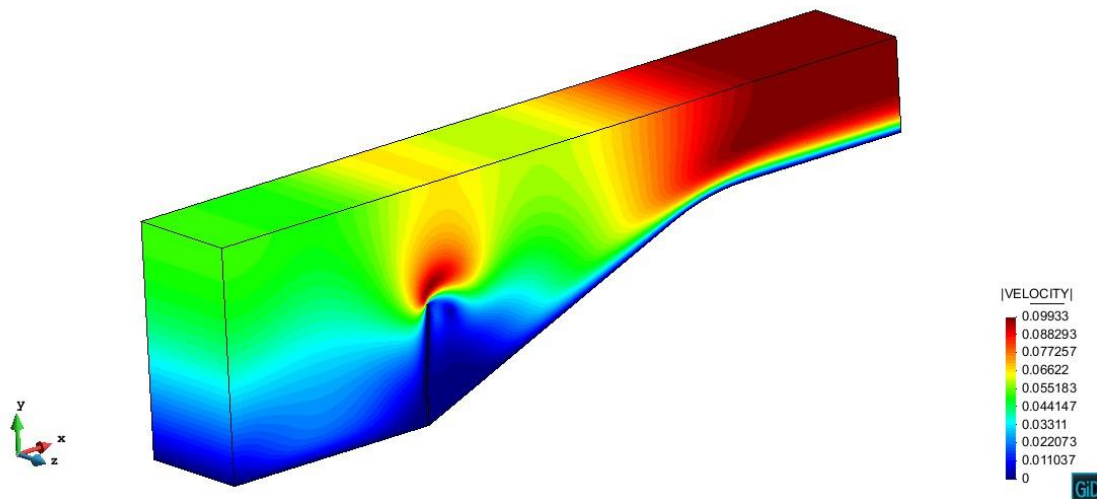


Imagen 4.8 Distribución de velocidades en el Mok en 3D [m/s]

En la Imagen 4.8 se puede ver, mediante una perspectiva en 3D, la distribución de velocidades en el segundo 7.6 del problema propuesto por Mok. A partir de esta vista se puede apreciar también esta distribución en las paredes de los planos XY e YZ. La escala de deformación en este caso es 20. Como se puede observar, el programa soporta perfectamente, además de los cálculos, los gráficos en 3D.

4.3 Problema de Turek – Hron

4.3.1 Descripción

Este es un problema ampliamente conocido en la comunidad FSI, expuesto en el documento [18] de la bibliografía. Es un problema en 2D que se usa en muchas ocasiones para comprobar el funcionamiento de los programas de cálculo debido a su gran complejidad.

Existen tres configuraciones de este problema, la FSI 1, la FSI 2 y la FSI 3, que tienen la misma geometría, pero distintas propiedades. La estructura del problema FSI 2 sufre grandes desplazamientos y la del problema FSI 3 tiene una gran frecuencia de oscilación. Esto es lo que hace que el problema sea complejo de resolver en cada una de estas variantes.

El problema consiste en una conducción donde entra el fluido y encuentra una estructura compuesta por una bandera atada a un cilindro rígido y estático. La geometría es la siguiente:

- $r = 0.05$ m
- $C = (0.2, 0.2)$
- $l = 0.35$ m
- $h = 0.02$ m
- La esquina inferior derecha de la bandera está situada en las coordenadas $(0.6, 0.19)$
- $L = 2.5$ m
- $H = 0.41$ m

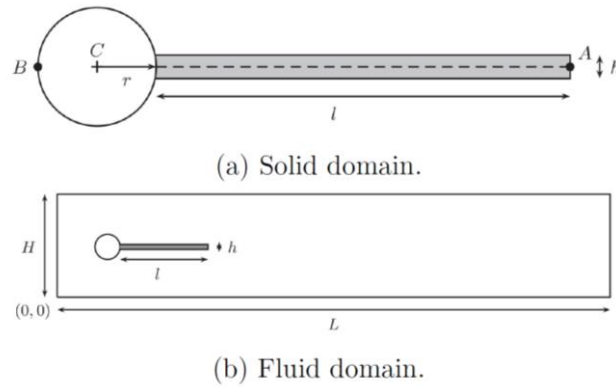


Imagen 4.9 Geometría del problema Turek - Hron. Imagen extraída de [18]

Las condiciones de contorno son las siguientes:

- Las paredes superior e inferior y el cilindro se consideran contornos con velocidad nula (*non-slip boundaries*)
- La presión en la cara derecha de la conducción es cero.
- El flujo entra por la cara izquierda de la conducción con la siguiente ecuación:

$$v(y, t) = 1.5\bar{u} \frac{4}{0.1681} y(0.41 - y) \quad (4.3)$$

Donde \bar{v} es un parámetro que depende del tiempo de la forma expuesta a continuación:

$$v_f = \begin{cases} v * \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{2} & \text{si } t \leq 2 \\ v & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.4)$$

Siendo \bar{u} es un valor conocido.

Las propiedades del fluido y la estructura son las siguientes:

- Fluido Newtoniano
- Densidad del fluido $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Viscosidad cinemática del fluido $\nu_f = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$
- Coeficiente de Poisson del sólido $\nu_s = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$
- Se considera la ecuación constitutiva hiperelástica de deformación plana de Kirchhoff – Saint Venant para la bandera

El resto de parámetros del sólido se exponen a continuación ya que dependen de qué problema se resuelve.

FSI 1:

- Densidad del sólido $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Módulo de Young $E_s = 0.5e + 06 \text{ N/m}^2$
- Velocidad básica $\bar{u} = 0.2 \text{ m/s}$

FSI 2:

- Densidad del sólido $\rho_s = 10000 \text{ kg/m}^3$
- Módulo de Young $E_s = 0.5e + 06 \text{ N/m}^2$
- Velocidad básica $\bar{u} = 1 \text{ m/s}$

FSI 3:

- Densidad del sólido $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Módulo de Young $E_s = 2e + 06 \text{ N/m}^2$
- Velocidad básica $\bar{u} = 2 \text{ m/s}$

Tal como se explicará a continuación en el apartado de Calibración, la malla usada para el fluido estará compuesta por triángulos y la usada para la estructura será de cuadriláteros, ambos lineales.

4.3.2 Calibración

Dada la gran complejidad de resolución de este problema se requiere realizar, previamente, algunos tests de calibración. Éstas pruebas están detalladas también en el documento [18] y sirven para conocer cuál es la malla idónea para cada problema, así como asegurar el correcto funcionamiento de los módulos CSM y CFD antes de iniciar el problema FSI.

Calibración del problema CSM

Se deben resolver tres problemas de estructura para obtener la malla idónea de cada una de ellas, así como comprobar el módulo CSM de Kratos Multiphysics. Estas mallas serán usadas posteriormente en los problemas FSI. Los problemas serán resueltos para la bandera de la Imagen 4.9. Las distintas configuraciones se llamarán CSM 1, CSM 2 y CSM 3 y sus características son:

CSM 1:

- Problema estático
- Problema no lineal ya que se usa la consideración de grandes desplazamientos y la ley hiperelástica
- Fuerza volumétrica (gravedad): [0, -2]
- Densidad $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Coeficiente de Poisson $\nu_s = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$
- Módulo de Young $E_s = 1.4e + 06 \text{ N/m}^2$

CSM 2:

- Problema estático
- Problema no lineal ya que se usa la consideración de grandes desplazamientos y la ley hiperelástica
- Fuerza volumétrica (gravedad): [0, -2]
- Densidad $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Coeficiente de Poisson $\nu_s = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$
- Módulo de Young $E_s = 5.6e + 06 \text{ N/m}^2$

CSM 3:

- Problema dinámico
- Problema no lineal ya que se usa la consideración de grandes desplazamientos y la ley hiperelástica
- Fuerza volumétrica (gravedad): [0, -2]
- Densidad $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Coeficiente de Poisson $\nu_s = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$
- Módulo de Young $E_s = 1.4e + 06 \text{ N/m}^2$

En los tres casos se estudia el desplazamiento en el punto A (Imagen 4.9), que se debe comparar con los resultados teóricos que se exponen a continuación:

- **CSM 1:** $u_x = -0.007187 \text{ m}$, $u_y = -0.0661 \text{ m}$
- **CSM 2:** $u_x = -0.000469 \text{ m}$, $u_y = -0.01697 \text{ m}$
- **CSM 3:** $u_x = -0.014305 \mp 0.014305 \text{ m}$, $u_y = -0.063607 \mp 0.06516 \text{ m}$

Una vez se han obtenido los valores correctos en el punto A, se puede afirmar que al problema está calibrado. Se seleccionará una malla que dé un error relativo inferior al 5% en ambos valores ya que se considera suficientemente bueno.

A continuación, se pueden ver las tablas con los distintos resultados obtenidos de los tres problemas de CSM:

Tabla 4.1 Resultados de la calibración CSM 1

Malla	Nodos	$u_x \text{ (m)}$	$u_y \text{ (m)}$	Error rel. $u_x \text{ (%)}$	Error rel. $u_y \text{ (%)}$
1	108	-0.0043541	-0.051587	39,42	21,96
2	355	-0.006158	-0.061225	14,32	7,33
3	1.269	-0.0068049	-0.064375	5,32	2,61
4	4.777	-0.0069898	-0.065244	2,74	1,30

Tabla 4.2 Resultados de la calibración CSM 2

Malla	Nodos	u_x (m)	u_y (m)	Error rel. u_x (%)	Error rel. u_y (%)
1	108	-0.00027936	-0.013108	40,43	41,07
2	355	-0.00039941	-0.01567	14,84	7,66
3	1.269	-0.00044307	-0.016508	5,53	2,72
4	4.777	-0.00045561	-0.016742	2,86	1,34

Tabla 4.3 Resultados de la calibración CSM 3

Malla	Nodos	u_x (m)	u_y (m)	Error rel u_x (%)	Error rel u_y (%)
1	108	-0.00895975 \mp 0.00896118	-0.05068230 \mp 0.05179755	37.37 \mp 37.36	20.32 \mp 20.51
2	355	-0.01258925 \mp 0.01258948	-0.05960292 \mp 0.06112451	11.99 \mp 11.99	6.29 \mp 6.19
3	1.269	-0.01387973 \mp 0.01388039	-0.06241243 \mp 0.06410476	2.97 \mp 2.97	1.88 \mp 1.62

La calibración tanto del CSM 1 como del CSM 2 no conllevan demasiadas complicaciones ya que se trata de un problema estático. Como se puede apreciar en las tablas 4.1 y 4.2, cuando se realiza el cálculo usando una malla más fina, el resultado obtenido es mejor. Aun así, durante la calibración, se ha podido observar que, para este caso, el resultado es mejor usando cuadriláteros en lugar de triángulos.

En el caso del CSM 3, al tratarse de un problema dinámico, es más complejo de resolver. Un aspecto muy importante a tener en cuenta es la relación entre el tamaño de la malla y el incremento de tiempo usado al calcular. En este trabajo, primero se intentó usar un paso de tiempo $\Delta t = 0.02$ s, pero resultó no ser adecuado, por lo que finalmente el paso de tiempo se establece como $\Delta t = 0.01$ s.

Tanto en el CSM 1 como en el CSM 2, se puede ver que la malla mínima aceptable para tener un error inferior al 5% es la número 4. Si ésta fuera demasiado fina para el cálculo del problema FSI (requiriendo un coste computacional excesivamente elevado), se podría usar la malla 3 ya que su error es aceptable en la dirección y y sobrepasa el 5% en 0,3 y 0,5% respectivamente. En el caso del CSM 3, la malla aceptable es la malla 3. A continuación se pueden ver los resultados de la malla seleccionada:

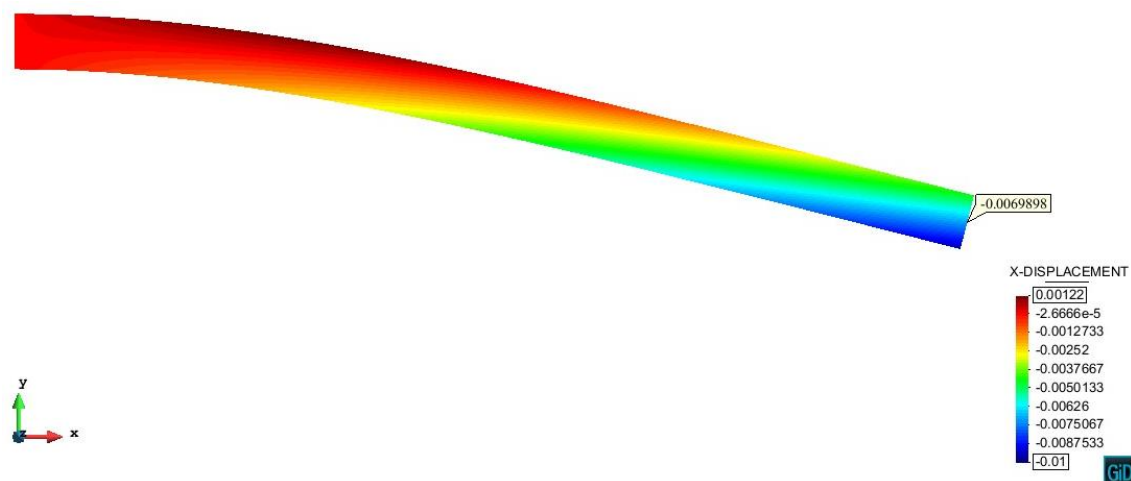


Imagen 4.10 Desplazamiento en x CSM 1. [m]

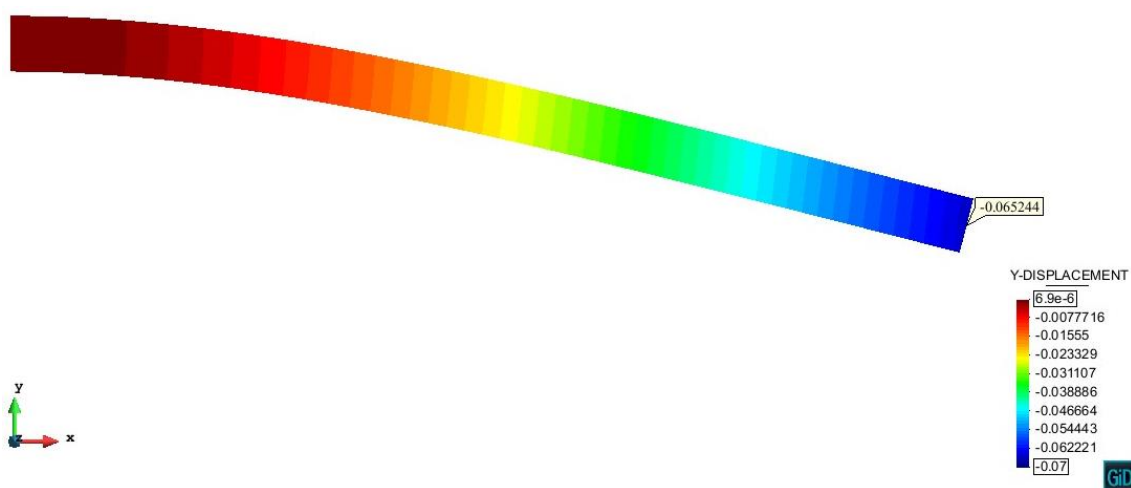
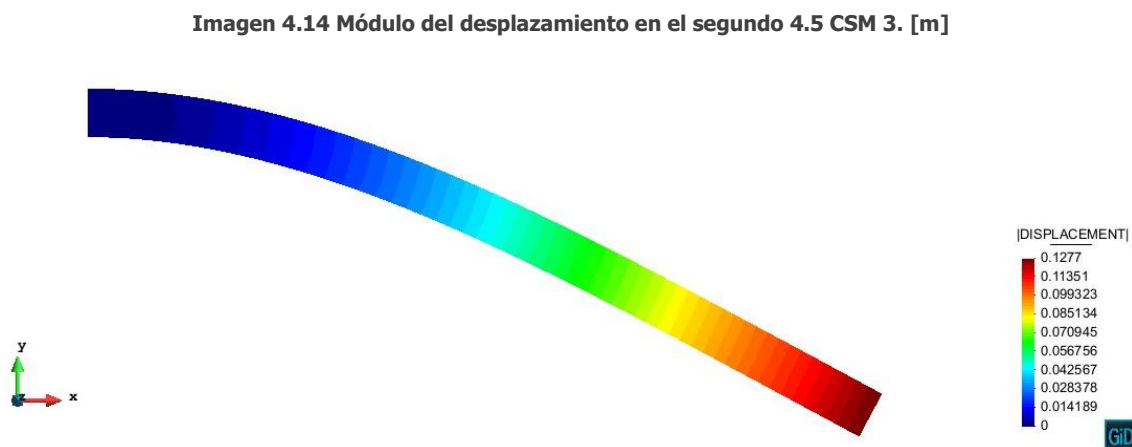
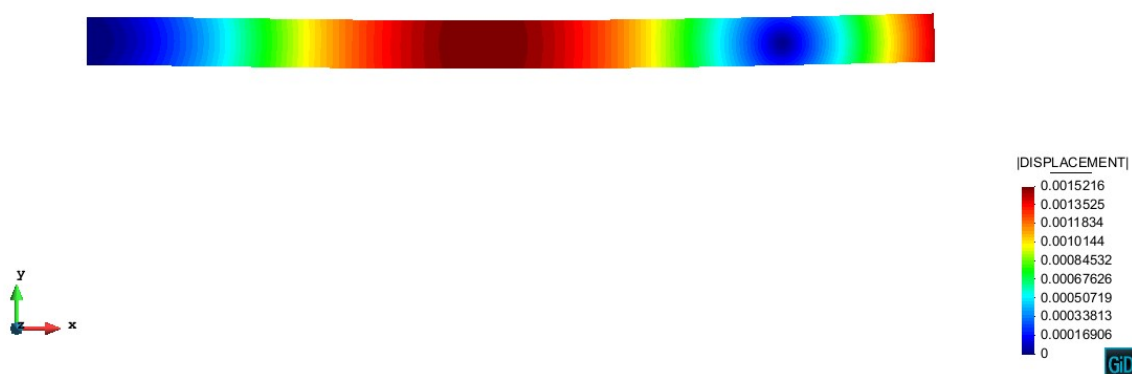
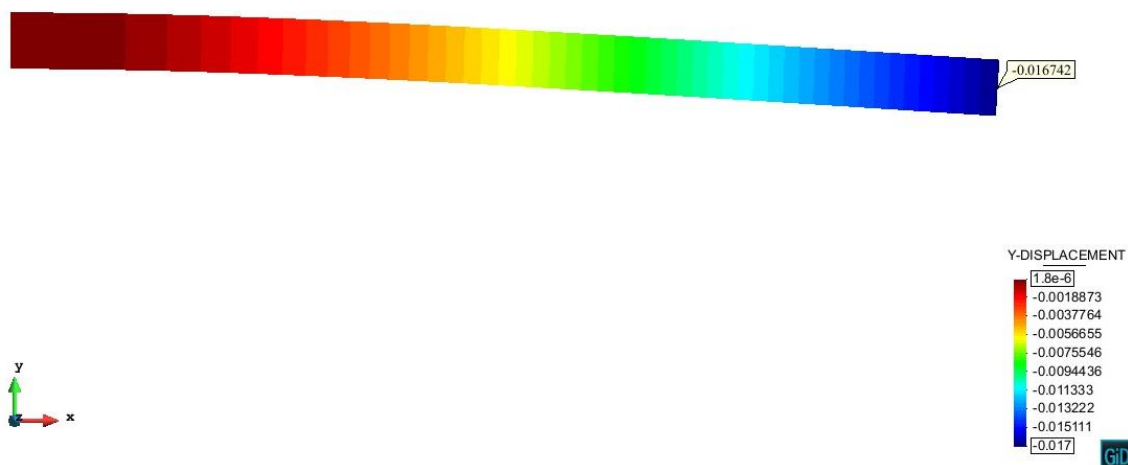


Imagen 4.11 Desplazamiento en y CSM 1. [m]



Imagen 4.12 Desplazamiento en x CSM 2. [m]



En todas las imágenes se ha usado una escala de deformación 1:1.

Calibración del problema CFD

De igual modo que en la calibración del CSM, en este caso también se deben resolver tres problemas de fluido, conocidos como CFD 1, CFD 2 y CFD3, para obtener la malla idónea, así como comprobar el módulo CFD de Kratos Multiphysics. La estructura es la misma que en la Imagen 4.9, pero se considera al cilindro y la bandera como una única estructura rígida. En los tres casos, la velocidad de entrada por la cara izquierda de la conducción tiene forma de parábola siguiendo la ecuación:

$$v(y) = 1.5\bar{u} \frac{4}{0.1681} y(0.41 - y) \quad (4.5)$$

En función del problema que se resuelve, el parámetro \bar{u} tiene un valor u otro:

CFD 1:

- Velocidad básica $\bar{u} = 0.2 \text{ m/s}$

CFD 2:

- Velocidad básica $\bar{u} = 1 \text{ m/s}$

CFD 3:

- Velocidad básica $\bar{u} = 2 \text{ m/s}$

En los tres casos se estudia el arrastre (fuerza recibida en el eje x) y la sustentación (fuerza recibida en el eje y) del cilindro y la bandera (Imagen 4.9), que se debe comparar con los resultados teóricos que se exponen a continuación:

- **CFD 1:** arrastre = 14.29 N, sustentación = 1.119 N
- **CFD 2:** arrastre = 136.7 N, sustentación = 10.53 N
- **CFD 3:** arrastre máximo = 445.07 N, arrastre mínimo = 433.83 N, sustentación máxima = 449.7 N, sustentación mínima = -425.92 N

Una vez se han obtenido los valores correctos en el cilindro y la bandera, se puede afirmar que el problema está calibrado. Se seleccionará una malla que dé un error relativo cercano al 5% en ambos valores ya que se considera suficientemente bueno. En el caso del fluido se acepta un error superior al del caso del sólido ya que, de otro modo, requeriría un coste computacional demasiado elevado.

A continuación, se pueden ver las tablas con los distintos resultados obtenidos de los tres problemas de CFD:

Tabla 4.4 Resultados de la calibración CFD 1

Malla	Nodos	Arrastre (N)	Sustentación (N)	Error rel. Arrastre (%)	Error rel. Sustentación (%)
1	1.672	14.52478732	1.41636700	1.64	26.57
2	2.321	14.46252181	0.99212507	1.21	11.34
3	3.515	14.40318975	1.08367719	0.79	3.15

Tabla 4.5 Resultados de la calibración CFD 2

Malla	Nodos	Arrastre (N)	Sustentación (N)	Error rel. Arrastre (%)	Error rel. Sustentación (%)
1	1.672	142.83806475	15.4551776840	4.49	46.77
2	2.321	140.46542368	13.53460407	2.75	28.53
3	3.515	139.48063093	8.28370674	2.03	21.33
4	7.507	138.31510951	11.18553028	1.18	6.23

Tabla 4.6 Resultados de la calibración CFD 3

Malla	Nodos	Arrastre (N)		Sustentación (N)		Error rel. Arrastre (%)		Error rel. Sustentación (%)	
		Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
1	7.507	446.2369	438.8742	172.7237	-289.7601	0.26	1.16	61.59	31.97
2	17.311	447.6539	435.8300	434.1762	-458.8244	0.58	0.46	3.45	7.72

Tanto en el caso del CFD 1 como el CFD 2, el resultado obtenido para el arrastre y la sustentación, al cabo de unos segundos, se estabilizan en el valor esperado con todas las mallas utilizadas. Por lo tanto, se trata de problemas con un flujo estacionario, tal y como era esperado.

Por otro lado, en el caso del problema CFD 3, ambos valores oscilan. Inicialmente los valores del arrastre y la sustentación fluctúan de forma aleatoria hasta llegado a un cierto punto donde se estabilizan obteniendo una solución periódica.

La calibración tanto del CFD 1 como del CFD 2 no conllevan demasiadas complicaciones ya que, como se puede ver en las tablas 4.4 y 4.5, al disminuir el tamaño de los elementos de la malla, se obtiene un resultado mejor, de igual modo que en los problemas de estructura. En el CFD 3, no es proporcional en todos los casos, ya que, para obtener un resultado correcto se debe disminuir significativamente el tamaño de los elementos de la malla y reducir el paso de tiempo. Esto se puede explicar mediante el número de Courant-Friedrichs-Lewy, que relaciona el tamaño de la malla con el paso de tiempo usado y la velocidad del fluido. El número de Courant-Friedrichs-Lewy se calcula como:

$$C = \frac{\Delta t}{\frac{\Delta x}{u}} = \frac{u \cdot \Delta t}{x} \quad (4.6)$$

donde:

- Δt es el paso de tiempo usado
- Δx es el intervalo del espacio
- u es la velocidad del fluido

Inicialmente se usó un paso de tiempo $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, pero no era suficiente para el tamaño de malla seleccionado, por lo que se disminuyó hasta $\Delta t = 0.005 \text{ s}$; obteniendo de este modo el resultado esperado (Ec. 4.6).

Es interesante remarcar que el error en la sustentación es, en todos los casos, mucho mayor que el del arrastre; por lo que la primera requiere una malla más fina para obtener un resultado considerado aceptable.

Tanto en el CFD 1 como en el CFD 2, se puede ver que la malla mínima aceptable para tener un error relativo cercano al 5% es la número 3 para el primer caso y 4 para el segundo. En el caso del CFD 3, la malla aceptable es la malla 2. A continuación se pueden ver los resultados de las mallas seleccionadas:

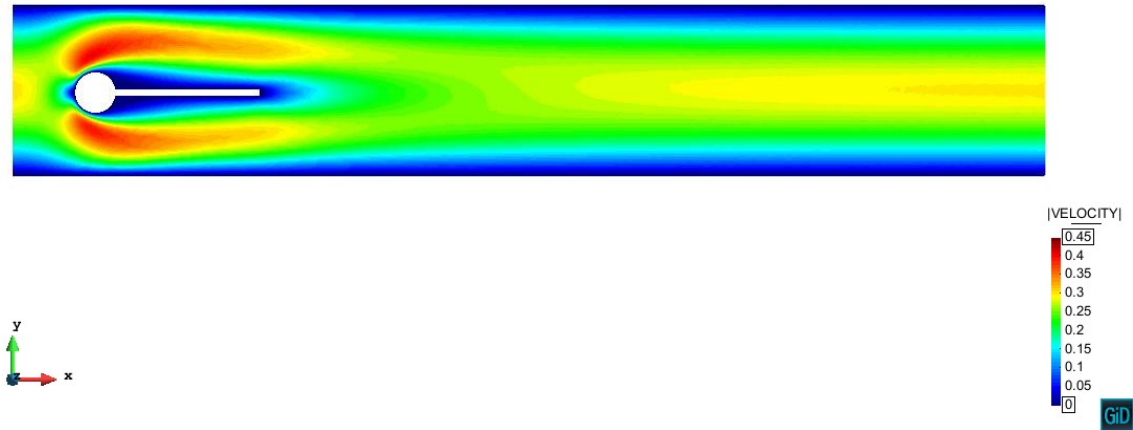


Imagen 4.16 Módulo de la velocidad en CFD 1. [m/s]

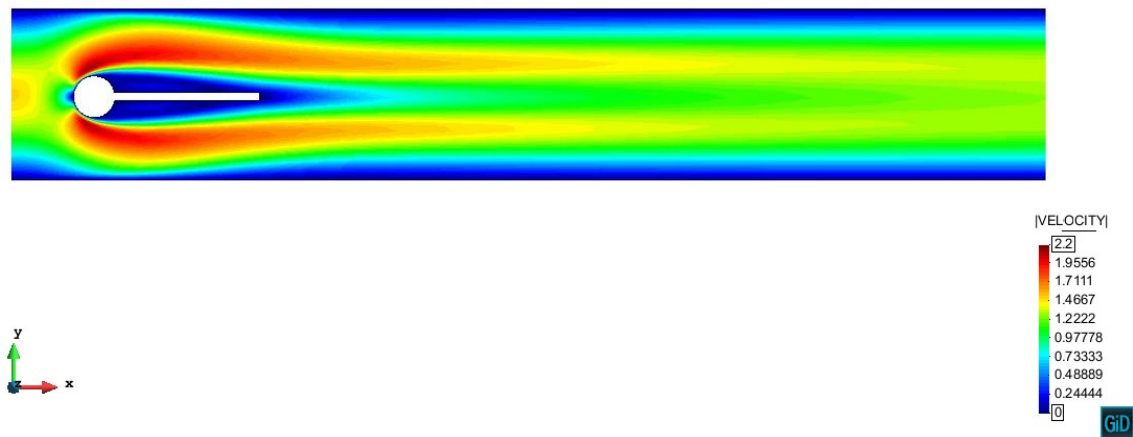


Imagen 4.17 Módulo de la velocidad en CFD 2. [m/s]

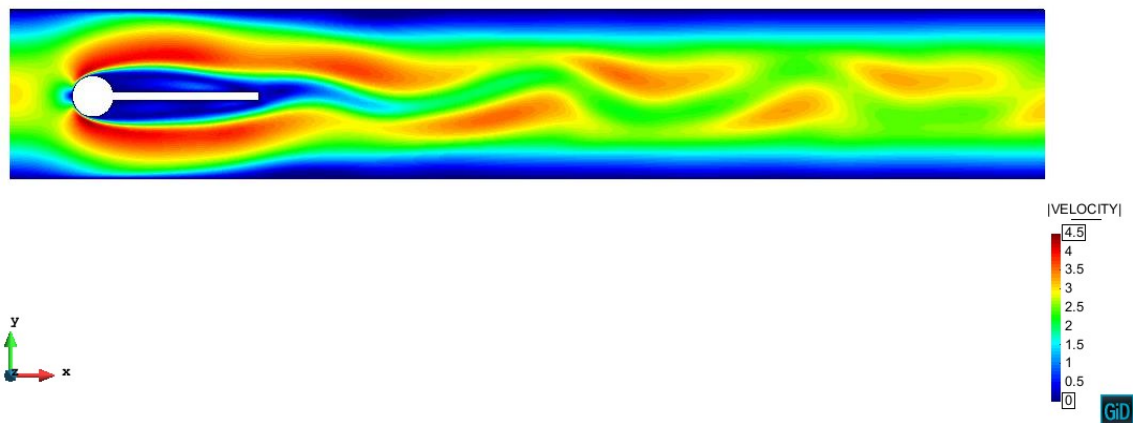


Imagen 4.18 Módulo de la velocidad en el segundo 42.8 CFD 3. [m/s]

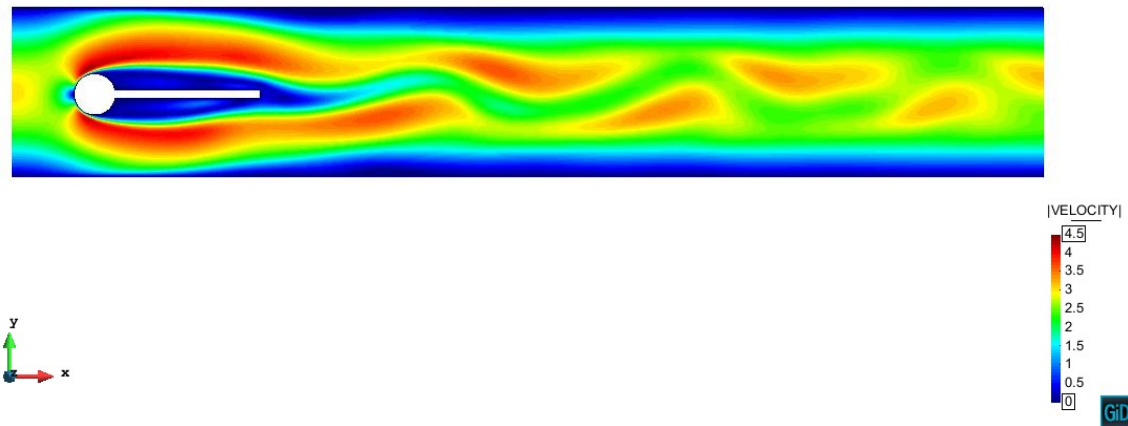


Imagen 4.19 Módulo de la velocidad en el segundo 42.93 CFD 3. [m/s]

4.3.3 Resultados

En este apartado se comentan los resultados obtenidos después de efectuar los tests FSI 1 y 3 de Turek – Hron. Tal y como se ha comentado anteriormente, estos se deben llevar a cabo después de realizar las calibraciones para el sólido y el fluido. Para comprobar si el resultado es el correcto, se estudia el desplazamiento en el punto A (Imagen 4.9) de igual modo que en el sólido y el arrastre y la sustentación del cilindro y la bandera igual que se hizo en el fluido, que se deben comparar con los resultados teóricos.

FSI 1

De acuerdo con [18], el problema FSI 1 se puede usar como test de validación inicial ya que es bastante sencillo de realizar debido a que su número de Reynolds es pequeño, por lo que se obtiene un flujo estacionario. Para calcularlo, se ha usado un paso de tiempo $\Delta t = 0.01s$. La malla usada para el fluido es la malla 4 del CFD 1. Se ha creado la malla de la estructura de modo que, en la zona de la interfaz, los nodos del fluido estén situados en el mismo punto que los nodos del sólido. Las propiedades tanto del fluido como de la estructura, así como las condiciones de contorno son las explicadas anteriormente.

En la Tabla 4.7 se resumen los resultados obtenidos.

Tabla 4.7 Resultados FSI 1

Valor	Referencia	Test	Error rel. (%)
u_x (m)	2.27e-05	2.31e-05	1.76
u_y (m)	8.209e-04	8.351e-04	1.73
Arrastre (N)	14.295	14.423	0.90
Sustentación (N)	0.7638	0.8255	8.08

Tal y como se esperaba, al realizar el cálculo se ha llegado a una solución estacionaria.

Si se comparan los resultados obtenidos con los de referencia, los valores del desplazamiento y el arrastre, tienen un error muy pequeño (menor al 2%). De igual modo que en los tests de CFD, el valor de la sustentación conlleva más complicaciones a la hora de calibrarlo, por lo que el error relativo es mayor, aunque cercano al 5%, por lo que el resultado se considerará válido.

Una vez realizado el FSI 1 como test de validación inicial, se puede proceder a calcular el FSI 3.

Durante la calibración del FSI 1 se detectó un error en la programación de la aplicación de cálculo de FSI del programa Kratos Multiphysics. Al realizar el cálculo del arrastre y la sustentación de una estructura por la influencia de un fluido, en la misma carpeta donde se guardan los archivos del problema que se está calculando, se debe crear un archivo .DRAG con la información de la fuerza que recibe la estructura en cuestión. Inicialmente, este archivo no se creaba ya que en el *script* de la interfaz del FSI no estaba escrita la llamada a este proceso. Al comentarlo con los programadores de Kratos Multiphysics, éstos modificaron el *script* necesario y actualmente este problema está resuelto.

A continuación, se pueden ver los resultados del desplazamiento en el punto A.

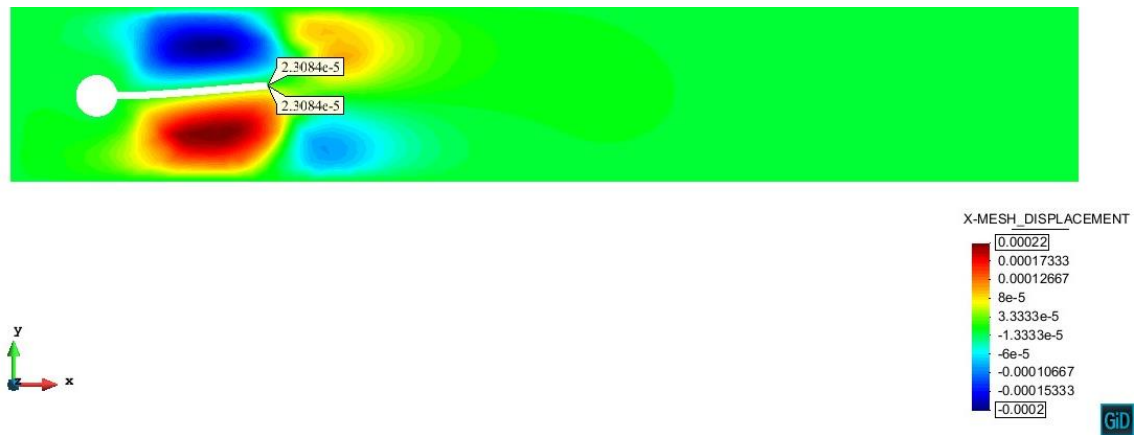


Imagen 4.20 Desplazamiento de la malla en el eje x del FSI 1. [m]



Imagen 4.21 Desplazamiento de la malla en el eje y del FSI 1. [m]

Para una mejor comprensión de la distribución de velocidades a lo largo del canal, se ha tomado una instantánea del resultado final.

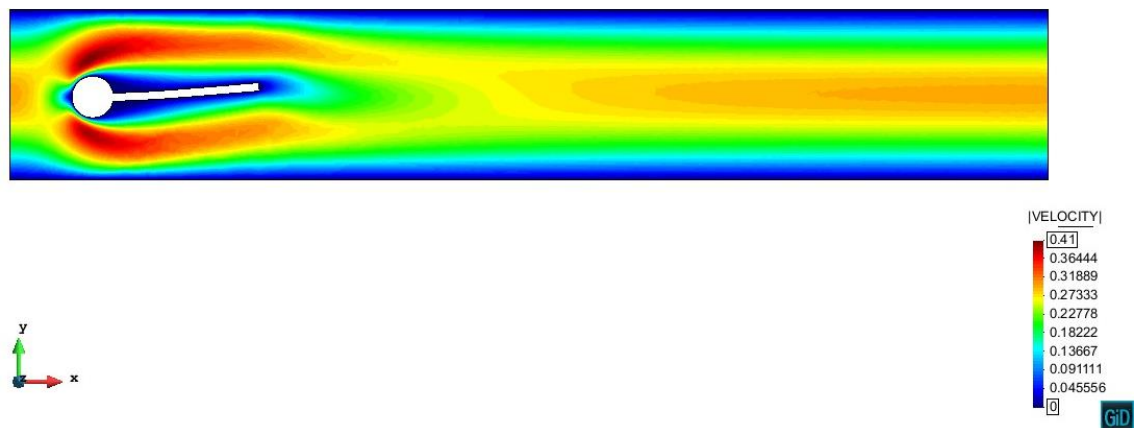


Imagen 4.22 Módulo de la velocidad del FSI 1. [m/s]

En la Imagen 4.22 se puede apreciar cómo afectan el cilindro y la bandera al flujo del fluido a lo largo del canal. En todas las imágenes se puede apreciar la deformación de la estructura a escala real. En la parte superior e inferior del cilindro, cerca de donde impacta el fluido existe un gran gradiente de velocidades, debido a que ésta es nula alrededor del cilindro y máxima en sus proximidades. Es interesante ver cómo, al disminuir la sección de paso, la velocidad del fluido aumenta significativamente, siendo aún más pronunciado este efecto debido al impacto que recibe éste con el cilindro.

FSI 3

De acuerdo con [18], al calcular el FSI 3, se espera un resultado con grandes deformaciones y oscilaciones complejas. Las propiedades tanto del fluido como de la estructura, así como las condiciones de contorno son las explicadas anteriormente. Se compararán los resultados obtenidos con los resultados de referencia expuestos a continuación:

Arrastre:

- Máximo = 488.24 N
- Mínimo = 432.76 N

Sustentación:

- Máximo = 156.41 N
- Mínimo = -151.41 N

$$u_x = -0.00288 \mp 0.00272 \text{ m}$$

$$u_y = 0.00147 \mp 0.03499 \text{ m}$$

Durante el cálculo del FSI 3 aparecieron bastantes problemas, por lo que se intentó calcular con cuatro mallas distintas y variando el paso de tiempo. En todos los casos se ha creado la malla de la estructura de modo que, en la zona de la interfaz, los nodos del fluido estén situados en el mismo punto que los nodos del sólido, de igual modo que en el FSI 1. La malla 1 es la misma que la malla 2 usada para el CFD 3. En el caso de la malla 2, se usó el mismo número de divisiones que en la malla 1 en la zona del cilindro y la bandera, pero se disminuyó el valor de transición entre distintos tamaños de elementos, por lo que se incrementó el número de nodos hasta 19.619 elementos. En la malla 3 se dividió la superficie del fluido en tres zonas, de igual modo que en el documento [14] de la bibliografía, para incrementar el número de elementos en la zona más próxima a la bandera, manteniendo la misma malla en la zona derecha de la figura. En la malla 4 se dividió la superficie del fluido creando un rectángulo en la zona de la bandera para incrementar el número de elementos en ese espacio, ya que, a partir de los resultados de la malla 3 se apreció que la definición en esa zona no era demasiado buena.

Comparando los resultados obtenidos con los detallados en el documento [21] de la bibliografía, se puede apreciar que el número de elementos usados para realizar el cálculo deberían ser suficientes. Inicialmente se usó un paso de tiempo de 0.005 segundos y al observar que los resultados no eran suficientemente buenos, sobre todo en el valor de la sustentación, se decidió disminuirlo hasta 0.002 segundos y a la vez, usar una malla un poco más fina. Después de obtener unos resultados peores en algunos parámetros, se decidió reducir otra vez la malla, pero el resultado tampoco fue bueno. Posteriormente, después de ver que el incremento en el número de nodos no era suficiente, se intentó disminuir el paso de tiempo a la mitad usando distintas mallas, pero no fue posible ya que el programa detenía el proceso de cálculo antes de llegar a la estabilización del problema.

Al ver que los resultados no mejoraban al cambiar la malla o el paso de tiempo usado, se calculó el número CFL (Ec. 4.6) para asegurar que la relación entre el tamaño de los elementos y el paso de tiempo era correcta. Para que sea así, este número debe ser menor que 10, tal y como pasa en todos los casos, por lo que el problema no proviene de aquí.

La codificación del programa ha quedado probada en todos los problemas resueltos, por lo que se supone que el error proviene de que no se ha usado el valor idóneo de algún parámetro usado para el cálculo de este problema.

A continuación, se pueden ver los resultados obtenidos con las distintas mallas, así como su error relativo, el paso de tiempo usado, el número CFL y el número de nodos de cada malla.

Tabla 4.8 Resultados FSI 3

Malla		1	2	3	4
Δt (s)		0.005	0.002	0.002	0.002
Nodos		16.561	19.619	38.906	43.632
CFL		1.5	0.6	0.86	2
Arrastre (N)	Máximo	493.75	502.88	515.00	521.10
	Mínimo	434.49	433.65	432.94	433.74
Sustentación (N)	Máximo	193.52	200.30	236.54	259.15
	Mínimo	-172.66	-200.37	-216.79	-237.86
Error rel. Arrastre (%)	Máximo	1.13	3.00	5.48	6.73
	Mínimo	0.4	0.21	0.04	0.23
Error rel. Sustentación (%)	Máximo	23.73	28.06	51.23	65.69
	Mínimo	14.04	32.33	43.18	57.10
u_x (m)	Media	-0.00146	-0.00173	-0.00198	-0.00213
	Amplitud	0.00331	0.00412	0.00483	0.00518
u_y (m)	Media	0.00124	0.00147	0.00157	0.00139
	Amplitud	0.03219	0.03499	0.04095	0.04290
Error rel. u_x (%)	Media	49.30	39.86	31.10	25.94
	Amplitud	49.30	51.53	77.42	90.30
Error rel. u_y (%)	Media	15.51	18.50	6.92	5.22
	Amplitud	8.01	5.55	17.03	22.60

Capítulo 5

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

5.1 Conclusiones

Como se ha comentado anteriormente, este trabajo tenía dos objetivos principales, comprobar el buen funcionamiento de los desarrollos recientes en FSI implementados en Kratos Multiphysics y aprender a usar técnicas numéricas para la resolución de problemas FSI.

Antes que nada, es importante remarcar que este trabajo ha sido realizado por una estudiante que no había usado anteriormente el programa Kratos Multiphysics. Para aprender su funcionamiento, el programa GiD cuenta con un tutorial que fue de gran ayuda. Este tutorial es muy completo en cuanto a distintos modos de graficar figuras, tanto sencillas como complejas y explica de forma muy detallada los distintos tipos de mallas que se pueden realizar. Sin embargo, no se explica con demasiado detalle cómo usar la aplicación de FSI de Kratos Multiphysics. Ésta es más compleja de usar debido a que se deben crear grupos asociados a las distintas propiedades del fluido y del sólido. Estos grupos están formados por puntos, líneas, superficies o volúmenes y es muy importante que todos los elementos del grupo pertenezcan al sólido o al fluido, pero nunca deben tener elementos de ambos. Debido a esto, en la zona donde el fluido y el sólido están en contacto, un mismo punto, línea, superficie o volumen se debe dibujar dos veces, una para el fluido y otra para el sólido.

Según el equipo de CIMNE, uno de los mayores cambios en la versión utilizada de Kratos Multiphysics fue la mejora de la interfaz. Dado que en el presente proyecto sólo se ha utilizado esta versión, no se dispone de elementos de comparación con la interfaz anterior, aun cuando si se evidencia que, una vez aprendido el funcionamiento del programa, su uso es sencillo en la versión actual. Una de las mejoras de dicha interfaz, ha sido la implementación de la posibilidad de introducir funciones en cuanto a la velocidad de entrada del fluido. Esto aporta comodidad al usuario en la parametrización del problema. En condiciones reales, un fluido no acostumbra a entrar con velocidad constante y, por tanto, esta parametrización permite una simulación mucho más adaptada a la realidad física.

Otra de las mejoras implementadas en esta nueva versión ha sido la paralelización open MP. Esta se ha usado durante el presente trabajo y se puede afirmar que funciona correctamente.

En cuanto a la resolución de problemas FSI, una de las partes más complejas es decidir el tamaño de la malla que se usará. El problema radica en que la elección de malla no es intuitiva y requiere experiencia. Debido a que, en general, el tiempo de cálculo es elevado, es importante escogerla bien, ya que, si no es la óptima, el resultado no será suficientemente preciso y se deberá volver a calcular todo el problema de nuevo con una nueva malla.

Una malla más fina no es condición suficiente para obtener resultados más precisos. Como se ha comentado a lo largo del trabajo, existe una relación entre el tamaño de la malla y el paso de tiempo seleccionado (número de Courant-Friedrichs-Lewy). Una malla más fina requiere un paso de tiempo más pequeño para obtener resultados correctos, pero esta relación tampoco es intuitiva. La dificultad de establecer el tamaño de malla adecuado con el paso de tiempo correcto para ese tamaño, hacen muy complicada la parametrización del cálculo. A destacar que, mallas finas combinadas con pasos de tiempo pequeños, se traducen en tiempo de cálculo y coste computacional elevados.

Otro aspecto relevante es el tipo de elemento utilizado para realizar la malla. Como anteriormente se ha comentado, se pueden usar distintas formas. A fin de eliminar este efecto, en la realización de este trabajo se ha usado el mismo tipo de elementos que usuarios anteriores.

Durante el desarrollo del cálculo del problema de Mok en 3D se pudo apreciar que la definición de la malla no sólo afecta a la calidad de los resultados, sino también al coste computacional. La primera vez se resolvió el problema con una malla incorrecta, y aunque esta tenía un número muy inferior de nodos, se requirió un tiempo superior para llegar hasta el mismo paso de tiempo que usando la malla correcta.

En el presente proyecto se ha resuelto el problema de Turek-Hron. Este está compuesto de tres partes muy diferenciadas, la resolución de un problema CSM, otro CFD y finalmente, el FSI. El uso de una misma geometría con distintos parámetros permite alcanzar diferentes conclusiones dentro de cada material, interacciones material – medio y conclusiones generales del propio programa de cálculo.

Se han resuelto tres problemas CSM, en todos los casos se ha asumido una deformación no lineal, se ha aplicado la misma fuerza volumétrica, misma densidad y coeficiente de Poisson del sólido (relación de la deformación transversal y longitudinal). En CSM 1 y CSM 3 se ha mantenido el mismo valor para el módulo de Young y se ha variado el tipo de aplicación de la fuerza de estático a dinámico. En CSM 2 se ha mantenido la aplicación de la fuerza estática, pero se ha usado un valor más elevado para el módulo de Young (menor deformación). En cuanto a variación de materiales, el tiempo de cálculo en el CSM 1 y el CSM 2 no presenta variaciones significativas y los resultados son precisos en ambos casos con la misma malla.

En el problema de fluidos también se han resuelto tres casos, variando solamente la velocidad de entrada del mismo yendo de número de Reynolds menor a mayor. En los dos primeros problemas, se alcanza una situación final estacionaria tal y como se esperaba, mientras que en el CFD 3, la solución es periódica. Comparando los dos primeros problemas, en el CFD 2, aproximadamente, se dobló el número de nodos (malla más fina) para obtener un resultado suficientemente bueno, pero no fue necesario modificar el paso de tiempo de cálculo. Sin embargo, en la resolución del CFD 3, fue necesario un aumento muy significativo del número de nodos, por lo que, para alcanzar un resultado satisfactorio, se tuvo que reducir el paso de tiempo a la mitad. Obviamente, el tiempo de cálculo en el CFD 3 fue significativamente mayor que en los casos anteriores. Si comparamos el CFD 1 con el CFD 2, en este último caso, tenemos un mayor valor de la reacción, por lo que se requiere una malla más fina. Resulta más extremo el caso del CFD 3 en que la velocidad a la que entra el fluido es mayor, combinado con una relación sustentación – arrastre pequeña, con lo que se requiere una malla significativamente más fina para modelar correctamente el sistema.

A partir de la realización del cálculo del FSI 1 y el FSI 3 se puede ver que, a menor número de Reynolds, el proceso de cálculo es más rápido y con un tamaño de malla más grueso, se obtienen valores suficientemente precisos. Por el contrario, con números de Reynolds más elevados, se requieren tiempos de cálculo más altos y mallas más finas. El motivo de este comportamiento puede explicarse en cuanto que en el FSI 1 tenemos un flujo espacialmente más estable y, por lo tanto, más fácil de modelar. Adicionalmente, al ser el módulo de Young menor y, por tanto, tener una mayor deformación, el valor de la solución de referencia será mayor, siendo el error relativo menor. En el FSI 3, existe un flujo con un mayor número de Reynolds combinado con un módulo de Young mayor (menor deformación), por lo cual, tenemos un flujo más complejo de modelar y un valor de la solución de referencia menor.

Se debe tener en cuenta que, durante el proceso de parametrización, sólo se han modificado el paso de tiempo y el tamaño de la malla, aun cuando existen muchos otros parámetros que determinan el resultado. Esto es debido a la poca experiencia en el uso de este tipo de *hardwares* de la persona que realizaba el trabajo y la falta de tiempo. Bajo esta premisa, se ha visto que en sistemas FSI, en caso de obtener resultados con poca precisión, sólo se consigue una cierta mejora incrementando de forma

significativa el número de elementos de la malla. Mientras que para los problemas CSM y CFD, con un incremento menor, se consiguen unos resultados más precisos. Quizás con otra parametrización, se podrían obtener resultados correctos sin necesidad de incrementar de una forma tan significativa el número de nodos.

Por otra parte, el objetivo del trabajo era comprobar los desarrollos recientes, más que obtener resultados excelentes.

Como apreciación personal, comentar que para sistemas FSI, utilizar este tipo de programas solo tiene sentido en el caso de materiales de densidades parecidas o si se esperan grandes desplazamientos dado que el coste computacional y el tiempo de cálculo es muy elevado. Añadir también que el tiempo de resolución de problemas en 3D aumenta mucho respecto al mismo problema en 2D. Se recomienda adaptar el problema a 2D siempre que sea posible.

Durante la ejecución del trabajo se han detectado muy pocos errores de programación, sólo en el caso del problema FSI 1 se detectó un pequeño problema descrito en el apartado 4.3.3 que fue inmediatamente corregido y no ha afectado para nada a la calidad del presente estudio.

5.2 Futuras líneas de trabajo

Considerando el interés de este programa que permite la resolución de problemas que de otro modo sería limitante, existe un gran interés en su constante evolución y mejora. En esta línea, los investigadores de Kratos Multiphysics están desarrollando una nueva versión que incluye la posibilidad de calcular los problemas FSI con una nueva técnica llamada Método Multivector de Quasi Newton recursivo (*Recursive Multivector Quasi Newton method*, *MVQN recursive*). La mayor ventaja de este método es que usa menos memoria RAM al solucionar los problemas. Al resolver un problema mediante el método MVQN, el procesador debe almacenar la aproximación de la inversa del Jacobiano del paso anterior, que es una matriz de gran tamaño en la memoria RAM; en cambio, con el método *MVQN recursive* se evita tener que almacenar esta matriz ya que funciona con dos matrices de un tamaño mucho menor. Este método está desarrollado por el propio equipo a partir del método MVQN explicado anteriormente y sería interesante probar su buen funcionamiento cuando esté listo. En futuros trabajos sería interesante comparar las iteraciones necesarias en cada paso de tiempo y la memoria RAM gastada con el método MVQN para ver si realmente este método funciona mejor.

Otra funcionalidad significativa que está en desarrollo actualmente sería asumir cálculos complejos en tiempos más razonables. La estrategia que se está siguiendo es la paralelización MPI de dos o más procesadores para aumentar la capacidad de cálculo. Por lo tanto, sería de interés comprobar la bondad de esta estrategia una vez finalizado el proyecto de mejora.

Dado lo descrito en el apartado 4.2 en referencia al problema de Mok en 3D que, debido al gran coste computacional y considerando las limitaciones del hardware usado, no se ha podido llegar hasta el final del cálculo. Sería interesante, utilizando un hardware más capaz, llegar hasta el final del cálculo. Asimismo, se debería extender el estudio en 3D a otros modelos.

Considerando los problemas encontrados durante el cálculo del FSI 3, se deberían buscar los motivos del fallo de cálculo a pasos de tiempo bajos a fin de obtener resultados correctos. Tal y como se ha explicado en la sección de pruebas y resultados, con distintas mallas y un paso de tiempo de 0.005 segundos, el cálculo era posible pero los resultados no eran correctos. El efecto de disminuir el paso de tiempo era una detención del proceso de cálculo. Considerando el amplio grado de parametrización que admite Kratos Multiphysics, probablemente se debería trabajar este aspecto a fin de obtener resultados satisfactorios.

En futuros ensayos también sería de interés realizar el cálculo del FSI 2 propuesto por Turek-Hron en el documento [18] de la bibliografía así como su cálculo en 3D.

Referencias bibliográficas

- [1] Y. Bazilevs, K.Takizawa y T.E.Tezduyar. *Computational Fluid – Structure Interaction: Methods and Applications*. Wiley Series in Computational Mechanics. Wiley – Blackwell, 2013.
- [2] T. Belytschko, W.K. Liu y B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, 2000.
- [3] A.E.J. Bogaers, S.Kok, B.D.Reddy y T.Franz. *Quasi-newton methods for implicit black-box fsi coupling*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279:113, 2014.
- [4] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, 1996.
- [5] P. Dadvand. A framework for developing finite element codes for disciplinary applications. Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya – Barcelona. 2007.
- [6] P. Dadvand, R. Rossi, A. Larese, M.A. Celigueta y J.M. Carbonell. <http://www.cimne.com/kratos>, 2012.
- [7] J. Donea y A. Huerta. *Finite Elements Method for Flow Problems*. Wiley, 2003.
- [8] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics: A continuum Approach for Engineering*. Wiley, 2000.
- [9] S.R. Idelsohn, F. del Pin y R.Rossi. *Arbitrary Lagrangian – Eulerian and Fluid – Structure Interaction*, capítulo 4. Wiley-ISTE, 2010.
- [10] U. Küttler y W.A. Wall. Fixed – point fluid – structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43:61 – 72, 2008.
- [11] V. Mataix. *A contribution towards the development of a virtual wind tunnel (VWT)*. Tesis de master. École Polytechnique Université Paris – Saclay, 2015.
- [12] A. Melendo, A. Coll, M. Masenau, E. Escolano y A. Monros. <http://www.gidhome.com>, 2017.
- [13] S. Minami y S. Yoshimura. Performance evaluation of nonlinear algorithms with line-search for partitioned coupling techniques for fluid – structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 64:1129 – 1147, 2010.
- [14] D.P. Mok. *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturmechanik und der Fluid – Struktur – Interaktion*. PhD thesis: Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2001.
- [15] X. Oliver y C. Agelet de Saracibar. *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*. Edicions UPC, 2002.
- [16] E. Oñate, P. Díez, F. Zárte y A. Larese. *Introduction to the Finite Element Method*. Ediciones UPC, 2008.

- [17] Y. Saad y M.H. Schlutz. Algorithms for strong coupling procedures. *Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7:856 – 869, 1986.
- [18] S. Turek y J. Hron. *Fluid – Structure Interaction: Modelling, simulation, Optimisation*, chapter Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid – Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow, pages 371 – 385. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [19] G. Valdés. *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. PhD thesis: Universitat Politècnica de Catalunya, 2007.
- [20] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor y D.D. Fox. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (edition 7). Butterworth – Heinemann, 2013.
- [21] R. Zorrilla. *FSI procedures for Civil Engineering Applications*. Trabajo Final de Máster: Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.